Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2014

Maria Laurinda Carreira Barros

Recursos digitais de apoio ao ensino: Derivadas

Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2014

Maria Laurinda Carreira Barros

Recursos digitais de apoio ao ensino: Derivadas

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática para Professores, realizada sob a orientação científica da Doutora Paula Carvalho, Professora auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro, e do Doutor Luís Descalço, Professor auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

Ao meu marido Domingos e às minhas filhas Clara e Sofia.

o júri

presidente

Professora Doutora Rita Isabel Gonçalves Simões
Professora Auxiliar, Universidade de Aveiro

vogais

Professor Doutor Rui Miguel Soares Pereira
Professor Auxiliar, Universidade do Minho

Professora Doutora Maria Paula Lopes dos Reis Carvalho
Professora Auxiliar, Universidade de Aveiro

agradecimentos / **acknowledgements**

Agradeço à Doutora Paula Carvalho, por todo o acompanhamento, pela orientação, sugestões, críticas, compreensão e disponibilidade prestada ao longo do ano.

Agradeço ao Doutor Luís Descalço, pelas sugestões, apoio, disponibilidade e colaboração neste trabalho.

Agradeço ao meu marido pela compreensão, apoio e incentivo que me deu ao longo deste percurso.

Às minhas filhas, Clara e Sofia, pelas horas que deixei de partilhar com elas, não lhes dedicando a devida atenção. Os seus sorrisos e alegria, ajudaram-me a ultrapassar momentos menos bons.

Aos restantes familiares, amigos e colegas pelo apoio e compreensão da minha ausência em muitos momentos.

Palavras Chave Derivadas, Recursos digitais, Sage Mathematics, MegUA, SIACUA.

Resumo

O presente trabalho tem por base a criação de recursos digitais de apoio ao ensino de derivadas no ensino secundário. Para tal o estudo teve como base o conceito, as propriedades e regras de derivadas; teoremas de funções deriváveis; estudo de extremos e monotonia de funções; derivada de segunda ordem, sentidos de concavidades e pontos de inflexão. Nos recursos digitais criados, recorreu-se ao software Sage Mathematics e pacote MegUA. Os mesmos estão disponíveis na plataforma aberta SIACUA.

Keywords

Derived, Digital Resources, Sage Mathematics, MegUA, SIACUA

Abstract

This work is based on the creation of digital resources to support the teaching of derivatives in secondary education. Therefore this study was based on the concept, properties and rules of derivatives; theorems of derivative functions; study of extreme and monotony of functions; second order derivative, direction of concavities and inflection points. The digital resources were created, making use of the Sage Mathematics Software and the MegUA package. They are available in the open platform SIACUA.

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

1.1 Organização do estudo

O presente trabalho está organizado em três partes. No primeiro capítulo, é referido a importância das TIC no processo ensino aprendizagem, uma nota histórica da evolução do cálculo diferencial ao longo dos tempos e a sua importância atual no currículo de Matemática no ensino secundário.

No segundo capítulo, são referidos os conceitos teórica subjacentes ao estudo das derivadas no ensino secundário, onde são explorados alguns pontos de interesse para o restante trabalho, para além das referências bibliográficas citadas, também foram consultadas outras obras que abordavam este assunto, nomeadamente livros de Cálculo de Apostol[1], Ostrowski [17], Piskounov [20] e Swokowski [29].

No terceiro capítulo, é feito uma descrição do MegUA, do Sage Mathematics e SIACUA, seguido da resolução detalhada de dois exercícios, criados no âmbito deste trabalho. Para a criação dos exercícios, a pesquisa incidiu em manuais e livros de apoio ao ensino secundário.

1.2 As TIC no Ensino da Matemática

O professor de matemática para ter sucesso no processo de ensino aprendizagem, para além de possuir um conhecimento profundo dos conteúdos matemáticos, deve usufruir de competências que permitam manipular habilmente as novas tecnologias. Com o desenvolvimento do Plano Tecnológico Escolar surgiu a oportunidade de transformar as escolas portuguesas em espaços de interatividade e de partilha sem barreiras, de forma a preparar as novas gerações para os desafios da sociedade do conhecimento [21]. Na comunidade educativa, à semelhança da restante sociedade, a informação circula rápida e livremente, as Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC), têm um papel cada vez mais influente e imprescindível na vida dos nossos educandos, pois o computador pessoal, os tablets e o telemóvel, são uma realidade. O professor tem de estar apto para dar respostas aos novos desafios. Os modelos curriculares incidem em competências transversais e na realização de tarefas de uma forma autónoma por parte do aluno. As TIC são uma ferramenta importante na vida do professor, na medida que permitem produzir novas situações de aprendizagem e novas metodologias de trabalho.

> *"Uma sociedade em constante mudança coloca um permanente desafio ao Sistema Educativo. As tecnologias de informação e comunicação (TIC) são um dos factores mais salientes dessa mudança acelerada, a que este Sistema Educativo tem de ser capaz de responder rapidamente, antecipar e, mesmo, promover[16]."*

O docente quando planifica a aula, para além de definir os objetivos, conteúdos, atividades a concretizar, opção metodológica a adotar e tipo de avaliação, deve prever este instrumento de trabalho, que permite ao aluno, na maior parte das vezes uma compreensão mais profícua do conteúdo a ser apreendido. Atualmente, alunos e professores dispõem de uma grande diversidade de recursos, que podem contribuir para o sucesso dos processos de ensino-aprendizagem e melhorar a qualidade das aprendizagens.

Estes instrumentos, tanto físicos como virtuais, podem tornar os processos formativos mais apelativos, por vezes mais rigorosos e de melhor compreensão, estimulando assim o gosto dos alunos em aprender, potenciando o desenvolvimento das suas capacidades e, consequentemente, contribuindo para o sucesso das suas aprendizagens.

O computador é uma ferramenta poderosíssima de cálculo que veio revolucionar o mundo matemático. Certos procedimentos que anteriormente eram feitos manualmente e demoradamente, são agora feitos de forma precisa e visualmente atraentes, de forma a cativar a atenção e interesse do aluno.

1.3 A evolução do cálculo diferencial

O grande avanço que a ciência e a tecnologia sofreram ao longo do século XX foi possível, em grande parte, graças ao desenvolvimento do cálculo diferencial e integral.

A origem do conceito derivada surgiu nos problemas geométricos que envolviam a reta tangente a uma curva num dado ponto, estudados na Grécia clássica. Porém só no século XVII, Isaac Barrow(1616-1703) estabeleceu a relação entre integração e diferenciação como problemas inversos um do outro, e mais tarde, dois homens geniais, Isaac Newton e Gottfried Leibniz, contribuíram de forma decisiva para que a matemática sofresse avanços extraordinários, ao criarem, separadamente um do outro, o **cálculo infinitesimal**.

> "Leibniz inventou o seu cálculo entre 1673 e 1676. Usou pela primeira vez o símbolo de integral, um S alongado, derivado da primeira letra da palavra latina *summa* (soma) em 29 de outubro de 1675. O objetivo era indicar uma soma de indivisíveis. Algumas semanas depois ele já escrevia diferenciais e derivadas como o fazemos hoje, assim como escrevia $\int x\, dy$ e $\int y\, dx$ para integrais."[7]

Leibniz deduziu muitas das regras de diferenciação que os alunos aprendem logo no início de um curso de cálculo [7]. A Leibniz juntaram-se mais tarde os irmão Bernoulli[1] que antes do final do século tinham encontrado a maior parte do nosso cálculo [27].

Muitos outros matemáticos contribuíram para o cálculo diferencial como hoje o conhecemos, é o caso de Leonard Euler (1707-1783) que estudou problemas de cálculo diferencial e deixou sobre este assunto, entre mais de oitocentas obras, o livro *Princípios do cálculo diferencial* (1755).

Uma definição rigorosa do conceito de infinitésimos (e portanto, do conceito de derivadas) só surgiu nos *Princípios Mathemáticos* do matemático português José Anastácio da Cunha (1744-1787) [27].

1.4 Derivadas no currículo do Ensino Secundário

A noção de derivada foi introduzida no ensino liceal português em 1905, e como em muitas áreas, sofreu mudanças de acordo com as épocas, contudo o treino do cálculo com expressões algébricas e a prática de exercícios artificiosos com limites e derivadas, nunca chegaram a perder por completo o seu lugar [26].

[1] Jacok (1654-1705), Nikolaus (1662-1716) e Johann (1667-1748)

No âmbito da revisão do Currículo Nacional iniciada em 2011, e em continuidade com o Programa de Matemática para o Ensino Básico, homologado pelo Despacho n.º 9888-A/2013, publicado no Diário da República, 2.ª série, n.º 143, de 26 de julho de 2013, a ser aplicado no 10.º ano, no ano letivo 2015-16, o Programa proposto estabelece o conjunto de conhecimentos e de capacidades essenciais que os alunos devem adquirir e desenvolver no decurso do Ensino Secundário, na disciplina de Matemática A.

No que respeita ao tema Cálculo Diferencial, no Novo Programa de Matemática A, serão introduzidos e em alguns casos reintroduzidos conceitos como: *O Teorema de Lagrange e de Rolle; Cinemática do ponto; Aplicações aos osciladores harmónicos, Primitivas e Cálculo Integral.*

Tendo em conta o desenho curricular, com o Novo Programa de Matemática A, os conceitos de velocidade e de aceleração, assumem especial relevância, por exemplo, a aplicação do cálculo diferencial à cinemática do ponto, onde é proposta especificamente a aplicação da noção de derivada à cinemática do ponto [3].

No próximo capítulo será desenvolvido a noção de tangente, ficando aqui uma breve referência à cinemática do ponto que é caracterizada pelo movimento de um ponto em relação a um referencial e os conceitos de velocidade e aceleração.

Considerando a função s de variável t, isto é, $s = s(t)$ e um ponto P, móvel sob o gráfico (ver figura 1.1).

Sendo t_0 e t_1, dois instantes distintos (com $t_0 < t_1$) a **velocidade média** no intervalo $[t_0, t_1]$ é a dada por:

$$v_m = \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}$$

Podemos também escrever, $t_1 - t_0 = \Delta t$, ou seja $t_1 = t_0 + \Delta t$ e também,

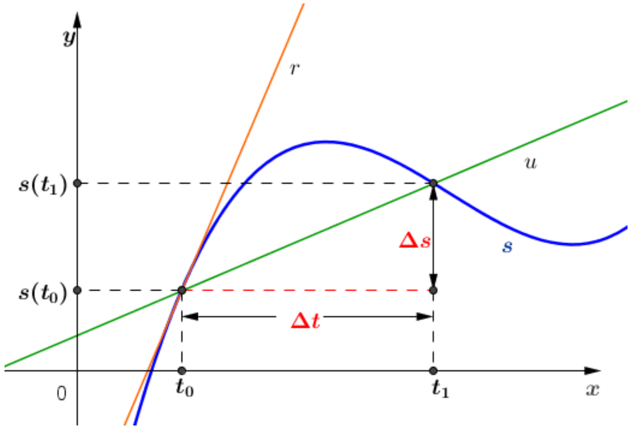

Figura 1.1: Função $s(t)$

$s(t_1) - s(t_0) = \Delta s$, ou seja $s(t_0 + \Delta t) - s(t_0) = \Delta s$.

Teremos então

$$v_m = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

podendo ainda escrever-se

$$v_m = \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}$$

Ou seja, quando a função s estabelece uma correspondência entre tempo e distância percorrida, é habitual chamar **velocidade média**.

De forma análoga a **velocidade instantânea** (velocidade de P no instante t_0) é dada pelo limite quando $t \to t_0$ da velocidade média no intervalo de extremos t_0 e $t \neq t_0$:

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}, \text{ ou fazendo } t - t_0 = h,\ v(t_o) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}$$

desde que o limite exista.

A velocidade é importante para estudar o movimento de um móvel ao longo de uma reta, mas a maneira como a velocidade varia também é importante.

Na física, a aceleração é definida como a variação da velocidade em relação ao tempo, isto é, se a velocidade no instante t é dada por $v(t)$, então a **aceleração média** neste instante será dada por:

$$\frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}$$

e o seu limite quando $t \to t_0$, se existir, é a **aceleração** do movimento de P no instante t_0.

$$a(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}$$

Capítulo 2

Derivadas

O conceito de derivada está intimamente relacionado à taxa de variação instantânea de uma função.

A modelação matemática permite descrever, interpretar e prever a evolução de um grande número de situações reais, o seu estudo pode ser inserido nas diversas áreas do conhecimento o qual está presente no quotidiano das pessoas, por exemplo, no cálculo da taxa de crescimento de uma certa população, da taxa de crescimento económico de um país, da taxa de redução da mortalidade infantil, da taxa de variação de temperaturas, da velocidade de corpos ou objetos em movimento. Enfim, existe uma panóplia de exemplos sobre a variação de uma função num determinado momento [28].

2.1 Taxa de Variação

Definição 1. Seja f uma função real contínua e seja I um intervalo aberto contido no seu domínio.

Dados $x_0 \in I$ e $x_1 \in I$, com $x_0 \neq x_1$, chama-se *taxa média de variação*, ou *taxa de variação média* e designa-se por $t.m.v._{[x_0,x_1]}$ ao quociente entre a variação da função f no intervalo $[x_0, x_1]$ e a amplitude do intervalo, ou seja:

$$t.m.v._{[x_0,x_1]} = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

O numerador da fração representa o **acréscimo** ou **variação** da função f no intervalo de extremos x_0 e x_1. A taxa média de variação traduz a variação média de f por cada unidade de variação independente.

2.1.1 Interpretação Geométrica e Coeficiente angular

Seja a reta definida pelos pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$ e a função $f(x)$ cujo gráfico está representado na figura 2.1.
Definimos como **coeficiente angular** ou **declive** de uma reta a $m = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$.
Geometricamente, a taxa média de variação de f corresponde ao **declive** da

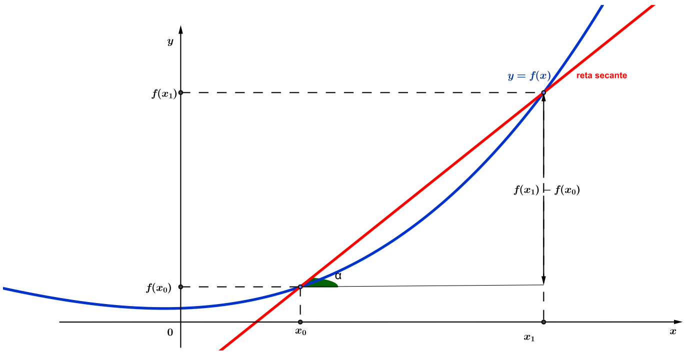

Figura 2.1: Taxa média de variação no intervalo $[x_0, x_1]$

secante que une os pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$ do gráfico de f. O coeficiente m é constante e igual à tangente do ângulo formado entre a reta e o eixo Ox.
Quando a função f traduz uma correspondência entre tempo e distância per-

corrida, à taxa média de variação é habitual chamar-se **velocidade média**
Da definição 1 decorre que:

- Se uma função é estritamente crescente (decrescente) num intervalo, a taxa média de variação da função nesse intervalo é positiva (negativa);
- Se uma função é constante num intervalo, então a taxa média de variação da função nesse intervalo é zero.

Os recíprocos destas afirmações não são verdadeiros como podemos ver no exemplo 1.

Exemplo 1. *Consideremos a função definida por* $s(t) = 0.5t^3 - 4t^2 + 7.5t + 2$ *em* $\mathbb{R}$ *e representada na figura 2.2.*

No intervalo $[0,2]$: $t.m.v._{[0,2]} = \frac{s(2)-s(0)}{2-0} = \frac{5-2}{2} = \frac{3}{2}$ *e a taxa média de*

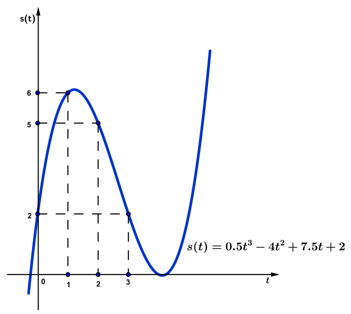

Figura 2.2: Função $s(t)$

variação é positiva e, no entanto, a função cresce e decresce, em intervalos contidos em $[0,2]$*, não sendo, por isso, crescente em todo o intervalo. E, no intervalo* $[1,2]$: $t.m.v._{[1,2]} = \frac{s(2)-s(1)}{2-1} = \frac{5-6}{1} = -1$*, a taxa média de variação, é negativa e, no entanto, a função cresce e decresce, em intervalos contidos em* $[1,2]$*, não sendo, por isso, decrescente em todo o intervalo. Mais, no* *intervalo* $[0,3]$: $t.m.v._{[0,3]} = \frac{s(3)-s(0)}{3-0} = \frac{2-2}{2} = 0$ *a taxa é nula e, no entanto, a função cresce e decresce, em intervalos contidos em* $[0,3]$*, não sendo, por isso, constante em todo o intervalo.*

Assim, a taxa média de variação pode ser positiva, negativa ou nula num intervalo e a função não ser crescente, decrescente ou constante, respetivamente, nesse intervalo.

2.1.2 Taxa de variação como derivada

Definição 2. Chamamos *taxa de variação instantânea* ou *derivada de f no ponto de abcissa x_0*, com $x_0 \in D_f$ e representamos por $f'(x_0)$ ou $\frac{df}{dx}(x_0)$ ao limite quando existe e é finito

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

isto é, se o limite é um número real. Neste caso, f diz-se *diferenciável* em x_0.

Assim, se a derivada de f num ponto x_0 é finita, diz-se "f é *diferenciável* no ponto x_0" com o mesmo significado de "f tem derivada finita no ponto x_0" [8]. Se f tem derivada finita em todos os pontos do seu domínio, dizemos, simplesmente, que f tem derivada finita ou diferenciável.

Contudo a derivada de uma função num ponto pode ser infinita, dado que a derivada de uma função num ponto é um limite, e este pode ser infinito [10].

Fazendo $x = x_0 + h$ obtém-se imediatamente a fórmula, por vezes mais prática no cálculo de derivadas:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

A taxa de variação média (instantânea) também se designa por velocidade média (instantânea) ou taxa de crescimento média (instantânea), consoante o contexto em que se aplica.

No cálculo diferencial, existe notações diferentes para a derivada, as mais importantes são as de Lagrange, Leibniz e Newton. Estas são utilizadas conforme a circunstância ou conveniência.

Leibniz foi um autodidata que viveu no século XVII e adquiriu grandes conhecimentos na área de Filosofia, Direito, Teologia e Matemática [4]. Ele percebeu a importância das notações no auxílio dos cálculos. A notação de Leibniz é a mais comum quando uma função envolve duas variáveis, por exemplo, se $f(x,y)$ denota-se $\frac{\partial f}{\partial x}$ à derivada de f em ordem a x e a $\frac{\partial f}{\partial y}$ derivada de f em ordem a y.

Na notação de Lagrange, a derivada de uma função f é escrita como $f'(x)$ e lê-se *"f linha de x"*. Para calcular a segunda derivada usa-se a notação $f''(x)$.

Newton criou uma notação que é bastante usada em alguns livros técnicos, por exemplo, na Mecânica Teórica onde, a grandeza velocidade (derivada de x em relação a t, tempo) denota-se por $v = \dot{x}(t)$ e na segunda lei de Newton (força resultante é o produto da massa pela aceleração) é enunciada em termos de derivadas, por $a = \ddot{x}(t)$.

2.1.3 Reta tangente

Consideremos a função f representada graficamente na figura 2.3. Seja A o ponto do gráfico de f com abcissa x_0 e seja P o ponto móvel do gráfico de abcissa x, sobre o gráfico f, de modo que x se aproxima de x_0 tanto quanto quisermos.

Definição 3. Seja f uma função definida num intervalo aberto $I \subseteq D_f$ e x_0 um ponto do seu domínio. Se $f'(x_0)$ existe e é finita, a reta que passa no ponto $A(x_0, f(x_0))$, e tem declive $f'(x_0)$ a *reta tangente ao gráfico de f no ponto A*

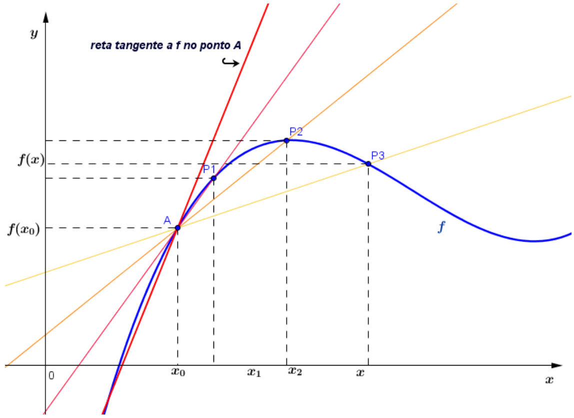

Figura 2.3: Reta tangente a f no ponto A

tem equação

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Notas:

1. A equação da reta normal ao gráfico de f no ponto $A(x_0, f(x_0))$ é

$$y = -\tfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0) \text{ se } f'(x_0) \neq 0.$$

2. Quando $f'(x_0) = 0$, a equação da reta tangente ao gráfico é $y = f(x_0)$ e a equação da reta normal ao gráfico é uma reta paralela ao eixo das ordenadas do tipo $x = x_0$.

2.1.4 Derivadas laterais

A noção de derivada de uma função num ponto tem um carácter local, isto é, depende apenas do comportamento da função numa vizinhança do ponto e quando existe, a derivada de uma função num ponto é única.

Definição 4. Seja f uma função real de variável real e x_0 um ponto do domínio de f. Diz-se que f é *derivável à esquerda em* x_0 se existe

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad \text{ou} \qquad \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

a que se chama derivada lateral à esquerda em x_0 e se representa por $f'(x_0^-)$; f é derivável à direita em x_0 se existe

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad \text{ou} \qquad \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

a que se chama *derivada lateral à direita* em x_0 e se representa por $f'(x_0^+)$.

Se existirem e forem iguais as derivadas laterais em x_0, então existe $f'(x_0)$.

Geometricamente, a derivada à esquerda em x_0 representa o declive da semitangente à esquerda e a derivada à direita de x_0 representa o declive da semitangente à direita de x_0. Como se pode observar no exemplo da figura 2.4, a função f apresenta um ponto anguloso, ou seja, existe derivada em x_0, mas $f'(x_0^-) \neq f'(x_0^+)$.

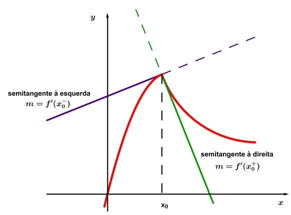

Figura 2.4: Derivadas laterais

Para que exista derivada de f em $x = x_0$ as semitangentes em $x = x_0$ devem estar no prolongamento uma da outra.

Definição 5. Se x_0 é um ponto interior de I, dizemos que f tem *derivada infinita* se $f'(x_0^-) = f'(x_0^+) = +\infty$, ou $f'(x_0^-) = f'(x_0^+) = -\infty$.

Geometricamente, se f têm derivada infinita em x_0; o gráfico de $f(x)$ admite uma reta tangente em $(x_0, f(x_0))$ paralela ao eixo das ordenadas.

Definição 6. Diz-se que uma função f é *derivável num intervalo aberto* $]a,\ b[$ (finito ou não), se o é em todos os pontos desse intervalo.

Uma função f é *derivável num intervalo fechado* $[a, b]$ se é derivável em $]a, b[$ e se existem derivadas à direita de a e à esquerda de b, isto é, se existem e são finitos os limites

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \qquad \text{e} \qquad \lim_{h \to 0^-} \frac{f(b+h) - f(b)}{h}.$$

Exemplo 2. *Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$, definida por*

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \textit{se } x \geq 1 \\ -2x + 2 & \textit{se } x < 1 \end{cases}.$$

Existirá $f'(1)$?

Observando a representação gráfica da função $f(x)$ na figura 2.5, parece que

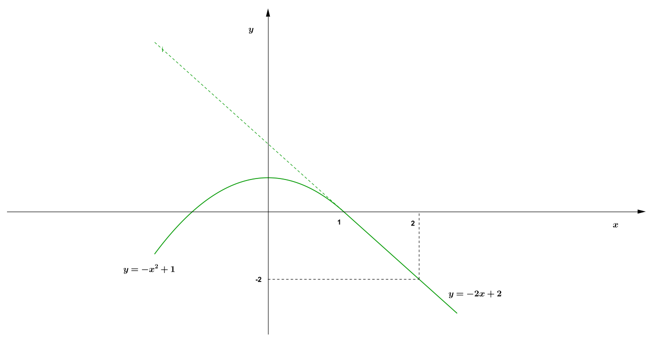

Figura 2.5: Gráfico de $f(x)$

a semitangente da esquerda está no prolongamento da semitangente da direita, *podendo assim existir* $f'(1)$. *Analiticamente, tem-se:*

$$\begin{aligned} f'(1^+) &= \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1^+} \frac{-x^2+1-0}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1^+} \frac{-(x+1)(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1^+} [-(x+1)] \\ &= -2 \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} f'(1^-) &= \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1^-} \frac{-2x+2-0}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1^-} \frac{-2(x-1)}{x-1} \\ &= -2 \end{aligned}$$

Como $f'(1^+) = f'(1^-) = -2$, *então a derivada da função* f *no ponto* $x = 1$ *existe e* $f'(1) = -2$.

Seja agora a função f *de domínio* $\mathbb{R}$, *definida por* $f(x) = |x-1|$. *Existirá* $f'(1)$*? Como*

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & se\ x \le 1 \\ -x+1 & se\ x > 1 \end{cases}$$

com representação parcial na figura 2.6. Temos neste caso,

$$f'(1^-) = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-1-0}{x-1} = 1 \;\; mas,$$

$$f'(1^+) = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{-x+1-0}{x-1} = -1.$$

Logo $f'(1^+) \neq f'(1^-)$, *e portanto, não existe* $f'(1)$.

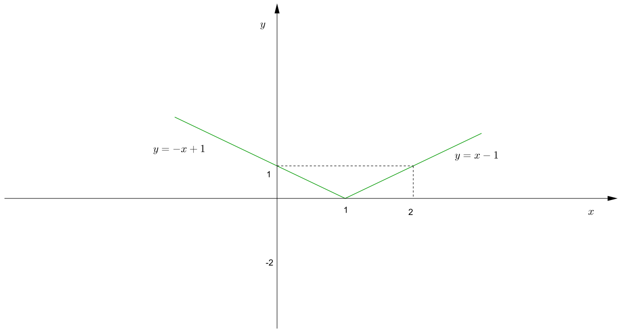

Figura 2.6: Gráfico de $|x-1|$

Considere-se ainda o seguinte caso:

Seja f, de domínio $\mathbb{R}_0^+$ definida por $f(x)=\sqrt{x}$. Será que existe $f'(0)$?

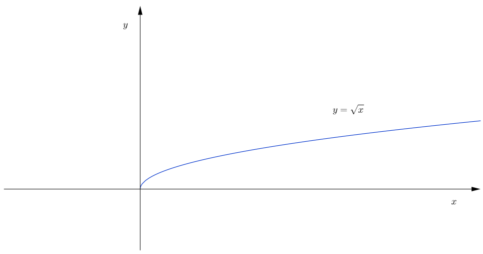

Figura 2.7: gráfico de $\sqrt{x}$

A função, representada parcialmente na figura 2.7, não está definida à esquerda de zero, assim não faz sentido calcular $f'(0^-)$. Neste caso $f'(0)=f'(0^+)$, se existir.

$$f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{x}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{1}{x}}=+\infty.$$

Pela definição 2, f não é diferenciável no ponto $x = 0$. Este exemplo foi adaptado de [15].

2.1.5 Derivabilidade e continuidade

A continuidade de uma função num ponto e a existência de derivada da função nesse ponto estão relacionados entre si. No estudo das derivadas laterais e das derivadas infinitas é comum depararmo-nos com situações do tipo: a função é contínua num ponto e não tem derivada nesse ponto; é contínua num ponto e tem derivada infinita nesse ponto; não é contínua num ponto e tem derivada infinita nesse ponto ou não é contínua num ponto e não tem derivada nesse ponto.
Para responder a estas questões temos o teorema 9. Para demonstrar os teoremas que se seguem necessitamos definir alguns conceitos.

Definição 7. Dizemos que um ponto $a \in \mathbb{R}$ é um *ponto de acumulação* do conjunto $I \subset \mathbb{R}$ se para todo $\varepsilon > 0$ existe um ponto $a \in I$ tal que $|x - a| < \varepsilon$.

Definição 8. Dada uma função f e um ponto $x_0 \in D_f$, diz-se que f *é contínua no ponto* x_0 se existir $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ e se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Teorema 9. Toda a função com derivada finita num ponto do seu domínio é contínua nesse ponto.

Demonstração:

Suponhamos que a função f tem derivada finita no ponto de abcissa x_0.

Tem-se que:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \times (x - x_0), x \neq x_0$$

Aplicando limites, vem:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0)) &= \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\times(x-x_0)\right]\\ &= \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right]\times\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\\ &= f'(x_0)\times 0\end{aligned}$$

Como $f'(x_0)$ é finita, tem-se $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, de acordo com a definição 8. Logo a função f é contínua no ponto x_0. ■

Note-se que o recíproco deste teorema não é verdadeiro. Há funções contínuas num ponto que não têm derivada finita nesse ponto. Como se pode observar no exemplo 3, a função é contínua em $\mathbb{R}$, mas não tem derivada no ponto de abcissa $x = 0$.

Exemplo 3. *Sejam as funções de domínio $\mathbb{R}$, definidas por*

$$f(x) = |x|; \qquad g(x) = \sqrt[3]{x}; \qquad h(x) = \sqrt[3]{|x|}.$$

Serão as funções deriváveis em todos os pontos do seu domínio?

Analisando

$$f(x) = \begin{cases} x & se\ x \geq 0 \\ -x & se\ x < 0 \end{cases}$$

Tem-se,

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-x-0}{x} = -1$$

$$e,\ f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x-0}{x} = 1.$$

Como $f'(0^+) \neq f'(0^-)$ não existe $f'(0)$. Na sua representação gráfica, figura 2.8, pode se observar que não é possível traçar a tangente ao gráfico da função em $x = 0$.

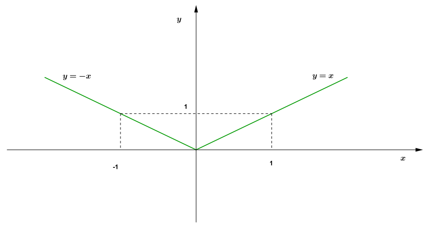

Figura 2.8: gráfico de $\sqrt{x}$

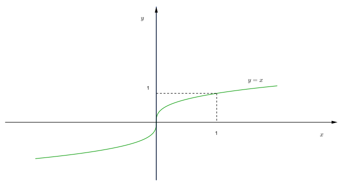

Figura 2.9: Gráfico de $g(x)$.

Considerando agora a função g definida em $\mathbb{R}$ por $g(x) = \sqrt[3]{x}$. Temos,
$$g'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \sqrt[3]{\frac{x}{x^3}} = \lim_{x\to 0^-} \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} = +\infty$$
e,
$$g'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt[3]{\frac{x}{x^3}} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} = +\infty.$$
Como $g'(0^+) = g'(0^-)$ então $g'(0) = +\infty$. Assim, tem derivada infinita em $x = 0$, mas não é diferenciável. A reta tangente ao gráfico da função no ponto de abcissa zero é uma reta vertical.

Considere-se agora, a função definida em $\mathbb{R}$, por $h(x) = \sqrt[3]{|x|}$. Temos,
$$h'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt[3]{|x|}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \sqrt[3]{\frac{-x}{x^3}} = \lim_{x\to 0^-} \sqrt[3]{\frac{-1}{x^2}} = -\infty,$$
mas,
$$h'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt[3]{\frac{x}{x^3}} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} = +\infty.$$

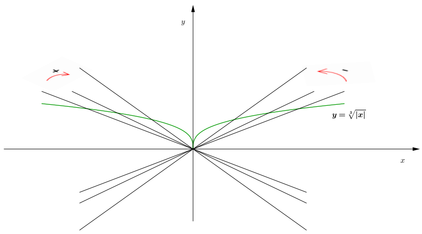

Figura 2.10: $h(x) = \sqrt[3]{|x|}$

Como $h'(0^+) \neq h'(0^-)$, não existe derivada em $x = 0$. ou seja, não existe uma reta não vertical que seja tangente ao gráfico da função h no ponto de abcissa 0.

Assim, conclui-se que a função f admite uma reta tangente vertical no ponto $(x_0, f(x_0))$ se f é contínua em x_0 e $f'(x_0^+) = f'(x_0^-) = +\infty$ ou $f'(x_0^+) = f'(x_0^-) = -\infty$ [1]. Se $f'(x_0)$ aproximar-se de $+\infty$ por um lado e de $-\infty$ por outro, dizemos que a função tem uma cúspide (ponta ou extremidade aguda) ou ponto anguloso em x_0. A função $h(x)$ tem um ponto anguloso para $x = 0$.

2.2 Função derivada e regras básicas de derivação

2.2.1 Função derivada

Definição 10. Se $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real de variável real, diferenciável em todos os pontos de I, fica definida em I uma nova função que em cada $x \in I$ tem por valor $f'(x)$.

A função assim definida é a *função derivada de f*. Pode designar-se por f', Df, ou ainda, quando $y = f(x)$, por $\frac{df}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$ ou y' [8]

Para evitar o recurso constante à definição de derivada, utilizam-se as regras de derivação.

Teorema 11. Seja f uma função real de variável real tal que $f(x) = k$ (k é um número real) e I um intervalo aberto, se $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável em $x_0 \in I$, então $f'(x_0) = 0$.

Demonstração: Se por hipótese f é uma função diferenciável num ponto x_0 de acumulação de D_f temos: $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{k-k}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{0}{h}$, e portanto $f'(x_0) = 0$. ■

Teorema 12. Seja f uma função real de variável real tal que $f(x) = kx$ (k é um número real) e I um intervalo aberto, se $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável em $x_0 \in I$, então $f'(x_0) = k$.

Demonstração: Se por hipótese f é uma função diferenciável num ponto x_0 de acumulação do seu domínio temos:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{kx - kx_0}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{k(x - x_0)}{x - x_0},$$

e portanto $f'(x_0) = k$. ■

Teorema 13. Seja f e g duas funções reais de variável real e I um intervalo aberto, $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções diferenciáveis em $x_0 \in I$, então $f + g$ é diferenciável em x_0 e tem-se,

$$(f + g)(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Demonstração: Se por hipótese f e g são funções diferenciáveis num ponto x_0 de acumulação do seu domínio, e atendendo, à propriedade dos limites, em que o limite da soma é a soma dos limites, temos que:

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(x_0+h)-(f+g)(x_0)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+g(x_0+h)-[f(x_0)+g(x_0)]}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\\
&=f'(x_0)+g'(x_0),
\end{aligned}$$

temos portanto,

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0).$$

■

Observação 1. *Podemos aplicar a regra da soma, repetidamente, para calcular a derivada da soma de três ou mais funções deriváveis.*

Por exemplo, considerando três funções, f, g e h, diferenciável num ponto $x_0 \in I$ *e* $f,g,h : I \longrightarrow \mathbb{R}$. *Tem-se* $(f+g+h)'(x_0) = [(f+g)+h]'(x_0) = (f+g)'(x_0)+h'(x_0) = f'(x_0)+g'(x_0)+h'(x_0)$. *De um modo geral, dado um número finito de funções diferenciáveis em* I *a derivada da soma das funções é igual à soma das derivadas de cada uma das funções, em* I.

Dá-se o nome de **função afim** a uma função real de variável real, definida por uma expressão do tipo $f(x) = mx+b$. De facto as três regras anteriores permitem calcular a derivada de uma função deste tipo.

$$f'(x) = (mx+b)' = (mx)' + (b)' = m+0 = m.$$

Teorema 14. Seja f e g duas funções reais de variável real e I um intervalo aberto, $f,g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções diferenciáveis em $x_0 \in I$, então $f \times g$ é diferenciável em x_0 e tem-se,

$$(f\times g)'(x_0) = f(x_0)\times g'(x_0) + g(x_0)\times f'(x_0).$$

Demonstração: Se por hipótese f e g são funções diferenciáveis num ponto x_0 de acumulação do seu domínio, e atendendo, à propriedade dos limites, em que o limite da produto é o produto dos limites, temos que:

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{(f\times g)(x_0+h)-(f\times g)(x_0)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)\times g(x_0+h)-f(x_0)\times g(x_0)}{h}.
\end{aligned}$$

Adicionando e subtraindo $f(x_0+h)g(x_0)$, vem:

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0+h)g(x_0)+f(x_0+h)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{[f(x_0+h)-f(x_0)]\,g(x_0)+[g(x_0+h)-g(x_0)]\,f(x_0+h)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot g(x_0)+\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\cdot f(x_0+h)\\
&=f'(x_0)\cdot g(x_0)+g'(x_0)\cdot f(x_0)
\end{aligned}$$

e portanto, $(f\times g)'(x_0)=f'(x_0)\times g(x_0)+f(x_0)\times g'(x_0)$. ■

Como consequência deste teorema a **derivada do produto de uma constante por uma função derivável** é o produto da constante pela derivada da função, ou seja,

$$(k.f(x_0))'=k.f'(x_0).$$

Esta regra pode ser ainda alargada ao **produto com vários fatores**,

$$\begin{aligned}
&[(f\cdot g\cdot h)(x_0)]'=(f(x_0)\cdot g(x_0))'\cdot h(x_0)+(f(x_0)\cdot g(x_0))\cdot h'(x_0)\\
&=\big(f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)\big)\cdot h(x_0)+f(x_0)\cdot g(x_0)\cdot h'(x_0)\\
&=f'(x_0)\cdot g(x_0)\cdot h(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)\cdot h(x_0)+f(x_0)\cdot g(x_0)\cdot h'(x_0).
\end{aligned}$$

Na generalidade e abreviando vem:

$$(f_1\times f_2\times\cdots\times f_n)'=f_1'\times f_2\times\cdots\times f_n+f_1\times f_2'\times\cdots\times f_n+\cdots+f_1\times f_2\times\cdots\times f_n'.$$

A regra do produto pode ser aplicada para determinarmos a derivada da potência de uma função. Este resultado é estabelecido no corolário seguinte.

Corolário 1. *Seja n um inteiro positivo. Se g é uma função real de variável real diferenciável em $x_0 \in I$ e I um intervalo aberto, tal que $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$, então*

$$(g^n)'(x_0) = n \cdot g^{n-1}(x_0) \cdot g'(x_0)$$

assumindo que g^n como produto de n fatores iguais a g.

Demonstração: Se por hipótese g é uma função diferenciável em todos os pontos do seu domínio temos:

$$\begin{aligned}
(g^n(x_0))' = \quad & \underbrace{(g(x_0) \times \cdots \times g(x_0))'}_{n \text{ fatores}} \\
= \quad & g'(x_0) \times \underbrace{g(x_0) \times \cdots \times g(x_0)}_{n-1 \text{ fatores}} + \underbrace{g(x_0) \times g'(x_0) \times \cdots \times g(x_0)}_{g'(x_0) \times g^{n-1}(x_0)} + \\
& + \cdots + \underbrace{g(x_0) \times g(x_0) \times \cdots \times g'(x_0)}_{n-1 \text{ fatores}} \\
= \quad & n \cdot g^{n-1}(x_0) \cdot g'(x_0).
\end{aligned}$$

∎

A regra de derivação para a potência de expoente natural é válida quando o expoente for um número racional, ou até um número real qualquer. Prova-se que:

$$(f^{\alpha}(x))' = \alpha \times f' \times f^{\alpha-1}(x)$$

em qualquer ponto do domínio de f^{α} onde esta seja derivável, em particular, a derivada da raiz quadrada (ou qualquer outro índice natural) de uma função.

$$\left(\sqrt[n]{f}\right)' = \frac{f'}{n\sqrt[n]{f}}$$

Teorema 15. Seja f e g duas funções reais de variável real, com derivada no intervalo aberto I e se $g(x_0) \neq 0$ para todo $x_0 \in I$, então $\frac{f}{g}$ é derivável em x_0 e tem-se,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f(x_0) \times g'(x_0) - g(x_0) \times f'(x_0)}{g^2(x_0)}, \qquad g(x_0) \neq 0.$$

Demonstração: Se por hipótese f e g são funções deriváveis num ponto x_0 de acumulação do seu domínio, e atendendo, às propriedades dos limites, temos que:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\frac{f(x_0+h)}{g(x_0+h)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g(x_0+h)}{g(x_0) \cdot g(x_0+h) \cdot h}$$

Se somar e subtrair na expressão anterior $f(x_0) \cdot g(x_0)$ temos: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) =$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g(x_0+h)}{g(x_0) \cdot g(x_0+h) \cdot h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{g(x_0) \cdot [f(x_0+h) - f(x_0)] - f(x_0) \cdot [g(x_0+h) - g(x_0)]}{g(x_0) \cdot g(x_0+h) \cdot h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{g(x_0) \cdot \left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right] - f(x_0) \cdot \left[\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\right]}{g(x_0) \cdot g(x_0+h)}
\end{aligned}$$

Portanto, $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$. ■

2.3 Derivada de uma função composta

Definição 16. Dadas duas funções, f e g, de domínios D_f e D_g, respetivamente, chama-se *função composta de f com g* à função $f \circ g$ cujo domínio é $D_{f \circ g} = \{x : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\}$ e a expressão analítica é $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Teorema 17. Se g é derivável num ponto x_0 e se f é derivável em $g(x_0)$ então $f \circ g$ é derivável em x_0 e tem-se:

$$(f \circ g)'(x_0) = f'[g(x_0)] \cdot g'(x_0).$$

Demonstração:

Se as funções f e g são deriváveis, vem:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \frac{f[g(x)] - f[g(x_0)]}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f[g(x)] - f[g(x_0)]}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right] \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{f[g(x)] - f[g(x_0)]}{g(x) - g(x_0)} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{f[g(x)] - f[g(x_0)]}{g(x) - g(x_0)} \cdot g'(x_0)
\end{aligned}$$

Se $\lim_{x \to x_0} \frac{f[g(x)] - f[g(x_0)]}{g(x) - g(x_0)}$ e $g(x) = u$ e $g(x_0) = u_0$, pela definição 16, como g é contínua em x_0 por ser diferenciável, $u \to u_0$ quando $x \to x_0$.

Vem, então:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f[g(x)] - f[g(x_0)]}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{u \to u_0} \frac{f(u) - f(u_0)}{u - u_0} \cdot g'(x_0)$$

ou ainda:

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(u_0) \cdot g'(x_0), \qquad \text{sendo} \qquad u_0 = g(x_0)$$

■

Assim, a derivada da função composta num ponto é o produto das derivadas das componentes nesse ponto, se estas derivadas forem finitas.

2.4 Derivada da função inversa

Teorema 18. Se f é uma função invertível que admite derivada finita, não nula, num ponto x_0, então f^{-1} é derivável em $y_0 = f(x_0)$ e

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Demonstração: Seja $y = f(x)$ então,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{y - y_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{x-x_0}{y-y_0}}.$$

Como, quando $x \to x_0$, também $y \to y_0$, pois sendo a função diferenciável em x_0 é contínua em x_0, vem

$$f'(x_0) = \frac{1}{\lim_{x \to x_0} \frac{x-x_0}{y-y_0}}.$$

Como $x = f^{-1}(y)$ e $x_0 = f^{-1}(y_0)$ vem,

$$f'(x_0) = \frac{1}{\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}} = \frac{1}{\left(f^{-1}\right)'(y_0)},$$

ou seja,

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

∎

Observação 2. *A hipótese $f'(a) \neq 0$ é fundamental, pois caso contrário, o resultado não é necessariamente verdadeiro. Tome-se como exemplo a função bijetiva $f(x) = x^3$. A sua inversa $\sqrt[3]{x}$, não é derivável na origem como vimos no exemplo 3.*

2.5 Derivadas de funções elementares

Como consequência imediata da regra de derivação da função composta temos os seguintes teoremas:

Teorema 19. Seja f uma função real de variável real definida em I tal que $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável em $x_0 \in I$, então

- Sendo $f(x_0) = e^{x_0}$, tem-se $f'(x_0) = e^{x_0}$.
- Sendo $f(x_0) = a^{x_0}$, $a \in I$ tal que $a > 0$ e $a \neq 1$, tem-se $f'(x_0) = a^{x_0} \ln a$.

Pelo teorema 17, vem $(e^u)' = u'\ e^u$ e $(a^u)' = u'\ a^u\ \ln(a)$.

Teorema 20. Seja f uma função real de variável real definida em I tal que $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função diferenciável em $x_0 \in I$, então

- Se $f(x_0) = \ln x_0$, tem-se $f'(x_0) = \frac{1}{x_0}$.
- Se $f(x_0) = \log_a(x_0)$, $a \in I$ tal que $a > 0$ e $a \neq 1$, tem-se $f'(x_0) = \frac{1}{x_0 \ln a}$.

Pelo teorema 17, vem $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ e $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln(a)}$.

Teorema 21. Seja f uma função real de variável real definida em I tal que $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função diferenciável em $x_0 \in I$, então

- Seja $f(x_0) = \sin x_0$, tem-se $f'(x_0) = \cos x_0$.
- Seja $f(x_0) = \cos x_0$, tem-se $f'(x_0) = -\sin x_0$.

Pelo teorema 17, vem $(\sin u)' = u'\ \cos u$ e $(\cos u)' = -u'\ \sin u$.

Teorema 22. Seja f uma função real de variável real definida em I tal que $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável em $x_0 \in \mathbb{R}\backslash \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$, então se $f(x_0) = \tan x_0$, tem-se $f'(x_0) == \frac{1}{\cos^2(x_0)}$.

Pelo teorema 17, vem $(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$.

As demonstrações das derivadas das funções elementares podem ser consultada em [10].

2.6 Monotonia e extremos

Definição 23. Seja f uma função definida no seu domínio D, temos:

- $f(a)$ é o *máximo absoluto* de f se, para qualquer $x \in D$, $f(a) \geq f(x)$.
- $f(a)$ é o *mínimo absoluto* de f se, para qualquer $x \in D$, $f(a) \leq f(x)$.
- $f(a)$ é o *máximo relativo* de f se existe um intervalo aberto I contendo a tal que $f(a) \geq f(x)$ para qualquer que seja $x \in I \cap D$.
- $f(a)$ é o *mínimo relativo* de f se existe um intervalo aberto I contendo a tal que $f(a) \leq f(x)$ para qualquer que seja $x \in I \cap D$.

Definição 24. Seja f uma função definida no intervalo fechado $[a, b]$. Um ponto c pertencente ao intervalo $[a, b]$ é chamado *maximizante* de f se $f(x) \leq f(c)$ para todo x em $[a, b]$. O valor $f(c)$ é chamado valor *máximo absoluto de f neste intervalo* ou, simplesmente, *máximo de f*.

Um ponto d de $[a, b]$ é chamado *minimizante* de f se $f(d) \leq f(x)$ para todo x em $[a, b]$. O valor $f(d)$ é chamado valor *mínimo absoluto de f neste intervalo* ou, simplesmente, *mínimo de f*.

Assim, se $f(c)$ é o máximo e $f(d)$ é o mínimo de f em $[a, b]$, teremos

$$f(d) \leq f(x) \leq f(c),$$

para todo x em $[a, b]$. Os valores máximo e mínimo de f são chamados *extremos* de f.

Na figura 2.11 está a representação parcial do gráfico de uma função f. Verifica-se que a monotonia da função está relacionada com o sinal da primeira

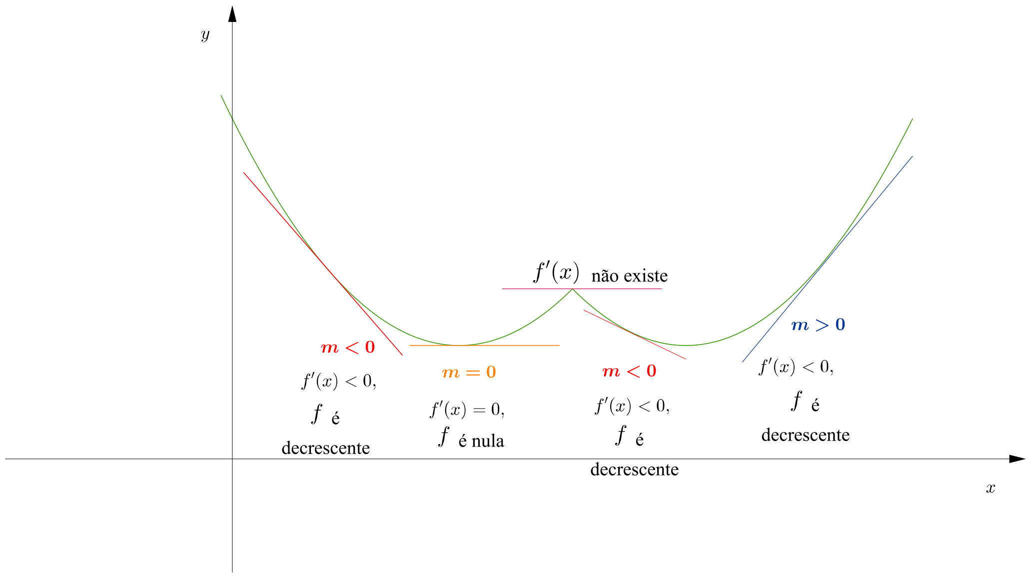

Figura 2.11: Monotonia e primeira derivada

derivada.

Se um número real x_0 pertence a um intervalo onde a função é crescente, a reta tangente no ponto $(x_0, f(x_0))$ tem declive superior ou igual a zero, pelo que $f'(x_0) \geq 0$. Se um número real x_0 pertence a um intervalo onde a função é decrescente, a reta tangente no ponto $(x_0, f(x_0))$ tem declive inferior ou igual a zero, pelo que $f'(x_0) \leq 0$. Se a função tem um extremo relativo (máximo ou mínimo) para $x = x_0$, a reta tangente no ponto $(x_0, f(x_0))$ tem declive zero, pelo que $f'(x_0) = 0$.

Assim temos o seguinte teorema:

Teorema 25. Seja f uma função contínua e derivável em todos os pontos de um intervalo aberto I. Então:

1. Se f é crescente em I, então $f'(x) \geq 0$ para todo o $x \in I$

2. Se f é decrescente em I, então $f'(x) \leq 0$ para todo o $x \in I$

3. Se f tem um extremo relativo num ponto a interior[1] de I, então $f'(a) = 0$.

Concluindo-se, que uma função, derivável em todos os pontos de um intervalo, tem um extremo relativo num ponto interior desse intervalo, então a derivada, nesse ponto, é zero.

Definição 26. Um elemento c do domínio de uma função f é um *ponto crítico* de f se $f'(c) = 0$ ou se $f'(c)$ não existe.

Contudo, o recíproco não é verdadeiro, ou seja, a derivada pode admitir um zero e a função não ter um ponto critico e a função ter um ponto crítico e não admitir derivada, como se pode observar no exemplo 3.

Teorema 27. Seja f uma função diferenciável em todos os pontos de um intervalo aberto I.

1. Se $f'(x) \geq 0$ para qualquer $x \in I$, então f é crescente em I

2. Se $f'(x) \leq 0$ para qualquer $x \in I$, então f é decrescente em I

3. Se $f'(x) = 0$ para qualquer $x \in I$, então f é constante em I

[1] Dizemos que a é um ponto interior de um intervalo I, se $a \in I$, mas não é extremo do intervalo [10]

As duas primeiras afirmações do teorema 27, são as recíprocas das duas primeiras afirmações do teorema 25.

Os teoremas 25 e 27, relacionam o sinal e os zeros da derivada de uma função com a monotonia e os extremos relativos dessa função, proporcionando assim um método rápido para o estudo de uma função quanto à monotonia e extremos relativos. Esse método, consiste primeiramente, em determinar a derivada, e os respetivos zeros e depois elaborar um quadro, onde se estabelece a relação entre o sinal e os zeros da derivada com a monotonia e os extremos relativos da função.

Teorema 28. Se uma função f é contínua num intervalo fechado $[a, b]$ e tem um máximo ou um mínimo em c do intervalo $]a, b[$, então $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.

Teorema 29. Seja f uma função definida num intervalo aberto $]a, b[$ e derivável num ponto $c \in\ ]a, b[$. Se $f'(c) \neq 0$ então $f(c)$ não é máximo nem mínimo relativo de f.

Isto é o contra recíproco do teorema 28, ou seja, se f é uma função contínua e derivável num intervalo fechado $[a, b]$, então c é um ponto crítico de f, se c não é ponto crítico, então $f(c)$ não é máximo nem mínimo de f.

Demonstração: Se $f'(c) \neq 0$, então $f'(c) > 0$ ou $f'(c) < 0$. Vamos supor, primeiro, que $f'(c) > 0$. Então, para x suficientemente próximo de c, temos

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0.$$

Logo, se $x < c$, tem-se $x - c < 0$, o que implica $f(x) < f(c)$. Agora, se $x > c$, tem-se $x - c > 0$, o que implica $f(x) > f(c)$. Assim, c não é extremo relativo de f.

Supondo, agora, $f'(c) < 0$, tem-se $(-f)'(c) > 0$. Logo, pelo caso anterior, c não é extremo relativo de $(-f)$ e assim, obviamente, c não é máximo nem mínimo relativo de f.

Assim o teorema é equivalente a dizer que se f é diferenciável em $]a, b[$ e c é um máximo ou mínimo relativo de f, então, $f'(c) = 0$. ■

Observação 3. *Esta condição é necessária mas não suficiente.*

De acordo com o que acaba de ser exposto, a primeira derivada de uma função pode ajudar a encontrar os extremos relativos da função, o teorema 30 é conhecido pelo *teste da primeira derivada.*

Teorema 30. Seja c um ponto crítico de uma função f pertencente ao interior de um intervalo I onde f está definida. Suponha que f seja contínua e diferenciável em I, exceto eventualmente em c. Então:

1. Se $f'(x) < 0$ à esquerda de c e $f'(x) > 0$ à direita de c, então $f(c)$ será um mínimo relativo de f em I.

2. Se $f'(x) > 0$ à esquerda de c e $f'(x) < 0$ à direita de c, então $f(c)$ será um máximo relativo de f em I.

3. Se $f'(x) < 0$ tanto à esquerda como à direita de c ou se $f'(x) > 0$ tanto à direita como à esquerda de c, então $f(c)$ não será máximo nem mínimo relativo de f.

Demonstração: Para demonstrar que $f(c)$ é um mínimo relativo de f, é preciso provar que $f(c) \leq f(x)$, qualquer que seja x numa vizinhança de c, isto é, para todo x num intervalo aberto $]a, b[$ que contém c. Suponhamos que as hipóteses do teorema verificam-se, isto é, que f seja contínua em I, que c seja um ponto crítico de f e que f seja derivável em I exceto, eventualmente, em $x = c$. Suponhamos também que $f(x) < 0$ à esquerda de c e que $f'(x) > 0$ à direita de c. Isto quer dizer que existem dois intervalos $]a, c[$ e $]c, b[$, ambos contidos em I, tais que $f'(x) < 0$ em $]a, c[$, o que implica que f é decrescente em $]a, c]$ e $f'(x) > 0$ em $]c, b[$ e, consequentemente, f será crescente em $]c, b]$.

Consideremos um ponto x pertencente ao intervalo $]a, b[$. Então, ou $x < c$ e, portanto, x estará em $]a, c]$, ou $x = c$, ou $x > c$ e, então, estará em $]c, b[$. Se $x \in]a, c[$, como f é decrescente em $]a, c]$, teremos que $f(c) < f(x)$. Se $x \in]c, b[$, como f é crescente em $]c, b]$, teremos que $f(c) < f(x)$. No caso restante, $f(c) = f(x)$. Assim, teremos que $f(c) \leq f(x)$ para todo x em $]a, b[$ e, portanto, $f(c)$ é um mínimo relativo de f. ■

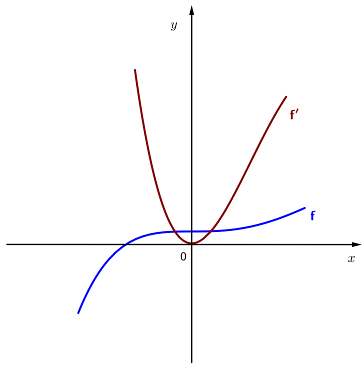

Figura 2.12: Relação entre a primeira derivada e a função

Considere-se a função f e a sua derivada f', representadas na figura 2.12, observa-se que apesar de 0 ser um zero da derivada de f, a função não tem extremo relativo para $x = 0$, isto acontece porque a derivada tem o mesmo sinal à esquerda e à direita de 0.

Repare-se que, em $x = a$ e em $x = b$, a função tem extremo relativo, nestes casos, há mudança de sinal da derivada. Em $x = a$ a derivada passa de positiva a negativa, pelo que a função passa de crescente a decrescente, tendo assim um máximo para $x = a$. Em $x = b$, a derivada passa de negativa a positiva, pelo que a função passa de decrescente a crescente, tendo assim um mínimo para $x = b$.

De um modo geral, tem-se que um zero da derivada corresponde a um extremo relativo da função, se a derivada mudar de sinal nesse ponto.

2.7 Concavidade e pontos de inflexão

No Ensino Secundário o estudo da concavidade do gráfico de uma qualquer função é feito apenas para funções diferenciáveis. Trata-se de um estudo intuitivo onde é associado a forma do gráfico à variação do declive das tangente em pontos sucessivos do gráfico [14]. No estudo das funções, encontramos funções que são crescentes mas que não crescem da mesma forma e o que as distingue é a concavidade.

Definição 31. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e considere-se uma função com valores definidos em I, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Diz-se que o gráfico de f é *convexo* em I se para qualquer $a, b \in I$ com $a < b$, o gráfico de f em $[a, b]$ está abaixo do segmento de extremos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

Dizemos que f é *côncava* em I se $-f$ for convexa.

Definição 32. Seja $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real de variável real, diferenciável em $a \in I$, e seja f' também diferenciável num ponto a interior do seu domínio, então diz-se que f *é duas vezes diferenciável em a*, sendo a s*egunda derivada* (ou função derivada de ordem 2) uma nova função cujo domínio é o conjunto de todos os pontos em que f' é diferenciável e, que a cada ponto do seu domínio faz corresponder a derivada da função f' nesse ponto, representa-se por

$$f''(x) \quad , \quad \frac{d^2 f}{dx^2} \quad \text{ou} \quad D^2 f.$$

Se f' for diferenciável no ponto x_0, tem-se

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0},$$

o domínio de f'' está contido no domínio de f', se f' tiver derivada finita em todos os pontos do seu domínio os dois domínios coincidem.

De um modo geral, dá-se o nome de derivada de ordem n de uma função f à derivada da derivada de ordem $n-1$ de f e representa-se por $f^{(n)}$.

Definição 33. O gráfico de uma função f tem a *concavidade voltada para cima* (respetivamente para baixo) num intervalo aberto I de $\mathbb{R}$ se para quaisquer pontos a e b pertencentes a I tais que $a < b$, o gráfico de f em $[a, b]$ está abaixo (respetivamente acima) do segmento de reta de extremos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

Teorema 34. Seja f uma função diferenciável em todos os pontos de um intervalo aberto I.

- Diz-se que o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em I, se f' for crescente, nesse intervalo.

- Diz-se que o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em I, se f' for decrescente, nesse intervalo.

Deste teorema, decorre a seguinte:

Teorema 35. Seja f uma função diferenciável em todos os pontos de um intervalo aberto I.

- O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em I, se $f''(x) \geq 0$, para todo $x \in I$.
- O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em I, se $f''(x) \leq 0$, para todo $x \in I$.

Matematicamente, o conceito ponto de inflexão está usualmente associada a uma mudança do sentido da concavidade do gráfico de uma função.

Definição 36. Seja f uma função diferenciável em todos os pontos de um intervalo aberto I. Seja a um ponto interior de I. Diz-se que o ponto $(a, f(a))$ é um *ponto de inflexão* do gráfico de f se, nesse ponto, o gráfico de f mudar o sentido da concavidade.

Teorema 37. Seja f uma função com segunda derivada finita em todos os pontos de um intervalo aberto I. Seja a pertencente a I. Se $(a, f(a))$ é um ponto de inflexão do gráfico de f, então $f''(a) = 0$.

Demonstração: Se $(a, f(a))$ é um ponto de inflexão do gráfico de f, então o gráfico de f muda o sentido da concavidade nesse ponto. Suponhamos que, por exemplo, que num intervalo $]b, a[$, $(b < a)$o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima e num intervalo $]a, c[$, $(b < a)$o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo. Então f' é crescente em $]b, a[$ e é decrescente em $]a, c[$. Como por hipótese, $f''(a)$ é finita, a função f' é contínua no ponto a, pelo teorema 9. Sendo f' contínua em a, crescente em $]b, a[$ e decrescente em $]a, c[$, podemos concluir que f' tem um máximo relativo em $x = a$. Portanto, $f''(a) = 0$, pelo teorema 25. ∎

O recíproco deste teorema não é verdadeiro, isto é, se a segunda derivada de uma função f pode ser zero, num certo ponto a, e o ponto $(a, f(a))$ não ser um ponto de inflexão do gráfico da função. Tomemos como exemplo a função f definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^4$, tem-se $f''(x) = 12x^2$, tem-se $f''(0) = 0$, mas o ponto não é ponto de inflexão do gráfico de f, pois a segunda derivada é sempre positiva, quer à esquerda, quer à direita de zero.

Teorema 38. Seja f uma função diferenciável, num intervalo aberto I e $c \in I$ um ponto crítico, isto é, $f'(c) = 0$.

1. Se $f''(c) > 0$, então f tem um mínimo relativo em c.

2. Se $f''(c) < 0$, então f tem um máximo relativo em c.

Temos ainda,

Teorema 39. Seja f uma função diferenciável e contínua num dado intervalo aberto I e $c \in I$, se $f''(c) = 0$ ou $f''(c)$ não existe e $f''(x)$ muda de sinal ao passar por c, então o ponto $(c, f(c))$ é um ponto de inflexão.

Em conclusão, para uma função f contínua, podemos calcular os intervalos em que f tem concavidade voltada para cima ou para baixo. Numa função descontínua, os intervalos de teste devem ser formados utilizando-se os pontos de descontinuidade juntamente com os pontos em que $f(x)$ é zero ou não está definida. O teorema 38 é conhecido como *teste da segunda derivada.*

2.8 Teoremas fundamentais do cálculo diferencial

Nas metas curriculares do novo programa de Matemática A, a ligação entre o sinal da derivada e a monotonia de uma dada função é estabelecida invocando-se o Teorema de Lagrange para uma das implicações, o qual é referido juntamente com o Teorema de Rolle, embora apenas se exija uma interpretação geométrica desses resultados. Em contrapartida pretende-se que o aluno saiba justificar a propriedade segundo a qual, se uma função que atinge um extremo num dado ponto em que é diferenciável, então a derivada anula-se nesse ponto, desde que pertença a um intervalo aberto contido no domínio da função. Para demonstrarmos os teoremas supracitados é necessário o teorema de Weierstrass[2] e enunciado pelo teorema 40.

Teorema 40. Seja f uma função contínua em $[a, b]$, então tem um máximo e um mínimo absolutos nesse intervalo.

2.8.1 Teorema de Rolle

Teorema 41. Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$. Se $f(a) = f(b)$ então existe $c \in \,]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.

Demonstração: Como f é contínua no conjunto limitado e fechado $[a, b]$, pelo teorema 40, podemos garantir que f atinge um máximo, M e um mínimo m no intervalo $[a, b]$.

Se $m = M = f(a) = f(b)$ a função é constante em todo o intervalo e, portanto, $f'(x) = 0, \quad \forall x \in \,]a, b[\,$. O que prova que o teorema é verdadeiro neste caso (ver figura 2.13).

Se $m \neq M$, então a função no interior do intervalo $[a, b]$ atinge pelo menos um máximo e um mínimo absolutos nesse intervalo.

Admita-se que f admite o valor máximo M no ponto c tal que $a < c < b$ (ver figura 2.14).

Então para valores de $x < c$ vem $x - c < 0$ e também $f(x) - f(c) < 0$ e portanto

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

[2] A demonstração pode ser encontrada em [1]

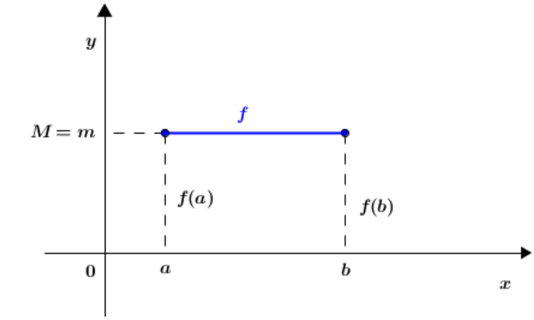

Figura 2.13: Caso $m = M$

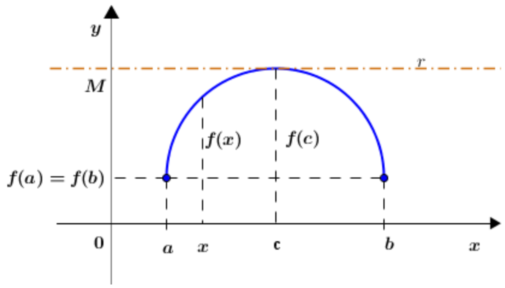

Figura 2.14: Caso $f(c) = M$

Como f é diferenciável no intervalo, vem

$$\lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c) \geq 0.$$

Para valores de c à esquerda de x, $x - c > 0$ e $f(x) - f(c) \leq 0$ e portanto,

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

e também,

$$\lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c) \leq 0$$

Mas então conclui-se que $f'(c) \geq 0$ e $f'(c) \leq 0$, o que só é possível se $f'(c) = 0$, provando-se assim o teorema. ∎

O teorema de Rolle garante que o gráfico de f admite uma **tangente horizontal** num ponto interior do intervalo aberto $]a, b[$. Para isso é absolutamente necessário que a função seja contínua em $[a, b]$ e que a função seja diferenciável em $]a, b[$.

Corolários do teorema de Rolle

Corolário 2. *Se x_1 e x_2 são zeros de uma função f, contínua no intervalo $[a, b]$ e diferenciável no seu interior, existe pelo menos um zero de derivada f' em $]a, b[$.*

Demonstração: Sejam x_1 e x_2 dois zeros de f, isto é, $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Então pelo Teorema de Rolle, existe $c \in]x_1, x_2[$ tal que $f'(c) = 0$.

A veracidade resulta do facto de estarem satisfeitas as condições do teorema de Rolle pois

$$f(a) = f(b) = 0.$$

■

Corolário 3. *Se $f : [a, b]$ uma função contínua em [a, b] e tem derivada (finita ou infinita) em todos os pontos de $]a, b[$ então entre dois zeros consecutivos de f' não pode haver mais que um zero de f.*

Demonstração: Sejam x_1 e x_2 dois zeros consecutivos de f' .

Suponha-se, com visto à obtenção de um absurdo, que existem α e β tais que $x_1 < \alpha < \beta < x_2$ e $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Então, pelo Teorema de Rolle, existe $d \in]\alpha, \beta[$ tal que $f'(d) = 0$. Isto é absurdo porque assim x_1 e x_2 não podem ser dois zeros consecutivos de $f'(x)$.

Portanto, entre dois zeros consecutivos de f' não pode haver mais que um zero de $f(x)$ (note-se que pode até não haver nenhum). ■

2.8.2 Teorema do valor médio (Teorema de Lagrange)

A partir do teorema de Rolle estabelece-se uma das mais importantes conclusões sobre derivadas, que é o

Teorema 42. Se $f(x)$ é contínua em $[a,b]$ e diferenciável em $]a,b[$, existe um $c \in\ ]a,b[$, tal que

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Demonstração: Consideremos uma função auxiliar g definida por

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

Vamos verificar que esta função satisfaz no intervalo $[a,b]$ as condições do teorema 41. Como g é contínua em $[a,b]$ e diferenciável em $]a,b[$ por ser a soma de duas funções igualmente contínuas e diferenciáveis, temos que,

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Se,

$$g(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (a-a) = f(a)$$

e,

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (b-a) = f(b) - f(b) + f(a) = f(a).$$

Temos, $g(a) = g(b)$. Logo existe um $c \in\ ]a,b[$ tal que $g'(c) = 0$.

Para esse valor de x vem

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \quad \text{ou} \quad f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

A partir desta igualdade pode escrever-se $f(b) - f(a) = (b-a) \cdot f'(c)$. ∎

Esta fórmula relaciona o acréscimo da função $(f(b)-f(a))$ com o acréscimo da variável $(b-a)$. Por isso se chama também ao teorema de Lagrange, **teorema dos acréscimos finitos**.

Corolários do Teorema de Lagrange

Corolário 4. *Uma função f que tenha derivada nula em todos os pontos de $]a,b[$ é constante nesse intervalo.*

Observação 4. *Este corolário é o recíproco do teorema 2.2.1.*

Corolário 5. *Se $f'(x)=0$ em $]a,b[$ então f é uma função constante em $[a,b]$, isto é, existe um número real k, tal que $f(x)=k$, qualquer que seja o ponto x de [a,b].*

Demonstração: Seja $x \in]a,b]$. Aplicando o teorema do valor médio em $[a,x]$. Então existe $c \in]a,x[$, tal que

$$f(x)-f(a)=f'(c)\cdot(x-a).$$

Como $f'(x)=0$ em $]a,b[$, tem-se $f'(c)=0$. Assim, $f(x)=f(a)$, para todo o x em $]a,b]$. Contudo, esta igualdade vale para todo x em $[a,b]$. Assim, f é constante em $[a,b]$. ∎

Corolário 6. *Se que $f'(x)=g'(x)$ para todo x no intervalo $]a,b[$, então, f e g diferem por uma constante, isto é, existe um número real k, tal que*

$$f(x)=g(x)+k,$$

para todo x em $[a,b]$.

Demonstração: Considere a função $h(x) = f(x) - g(x)$. Então, $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$, para todo x em $]a, b[$. Logo, pelo Corolário anterior, $h(x) = k$ para todo x em $[a, b]$ e alguma constante k real, ou seja, $f(x) - g(x) = k$, que é equivalente a $f(x) = g(x) + k$. ■

Uma importante extensão do Teorema de Lagrange constitui o resultado seguinte, conhecido por *(*Teorema de Cauchy).

Corolário 7. *Se f e g são duas funções contínuas em $[a, b]$ e diferenciáveis em $]a, b[$ e se para $x \in]a, b[, g'(x) \neq 0$ então existe um $c \in]a, b[$, tal que*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Demonstração: Se $g(a) = g(b)$, pelo *teorema de Rolle* $g'(x)$ anula-se em algum ponto entre a e b, o que contraria a hipótese. Portanto, $g(a) \neq g(b)$, assim, o segundo membro da igualdade acima é válido. Para provar o corolário, considere-se a função

$$F(x) = (f(b) - f(a))(g(x) - g(a)) - (f(x) - f(a))(g(b) - g(a)).$$

Esta função satisfaz as hipóteses do *teorema de Rolle* em $[a, b]$. Logo, existe um ponto c, entre a e b, tal que $F'(c) = 0$. Ou seja

$$(f(b) - f(a))g'(c) - f'(c)(g(b) - g(a)) = 0,$$

Que por sua vez é equivalente à afirmação que se quer provar. ■

Se $g(x) = x$, este corolário reduz-se ao *teorema do valor médio* e, portanto, é uma generalização do mesmo.

Com os teoremas, corolários e definições enunciadas e deduzidas neste capítulo, podemos fazer um estudo analítico completo de funções estudadas no Ensino Secundário, nomeadamente funções que envolvem expressões trigonométricas, exponenciais e logarítmicas.

Na globalidade, este foi o suporte teórico usado na construção dos exercícios desenvolvidos nesta dissertação, com mais ou menos peso, todos os conceitos foram abordados e aplicados na elaboração e resolução dos exercícios.

As novas tecnologias da educação, vieram revolucionar os métodos de trabalho matemático, com as calculadoras gráficas e computadores todo o processo se tornou mais compreensível. Podemos partir para o estudo de uma função conhecendo o seu gráfico em vez de seguir um caminho em que o gráfico é o culminar de um exaustivo trabalho analítico.

Capítulo 3

Implementação do software

3.1 Sage

Sage é um software matemático gratuito e open-source, desenvolvido sob a licença GPL por uma comunidade de programadores e matemáticos, com o intuito de ser uma alternativa para os principais sistemas proprietários de software matemático como é o caso do Matlab e Mathematica. Este software engloba a utilização de pacotes pré-existentes de renderização de imagens e outros, integrando-os em uma interface única, amigável e de fácil assimilação.

O Sage pode ser utilizado por meio de comandos de linhas interativos ou de um Notebook, uma interface acionada de dentro de um browser onde os passos são armazenados em páginas separadas por utilizador. Este Notebook pode estar conectado à instalação local ou remotamente por meio de rede e internet e permite a criação de gráficos e expressões matemáticas bem renderizadas que podem ser reutilizados, ampliados ou excluídos, e partilhados com outros usuários através da rede.

Sage é construído sobre várias linguagens de programação, como C, C++, Fortran, mas, principalmente Python[1], uma linguagem poderosa e relativamente fácil de aprender, possui um grande diversidade de aplicações e com inúmeras bibliotecas que podem ser anexadas de acordo com a necessidade do usuário [23].

Ainda que não seja necessário o domínio de Python para o uso de Sage, este conhecimento é interessante e amplia a funcionalidade do programa, pois Python, é uma linguagem interpretada, onde não existe pré-declaração de variáveis, os tipos das variáveis são determinados dinamicamente, o controle é feito apenas por indentação, não há delimitadores do tipo BEGIN e END ou $\{e\}$, oferece tipos de alto nível como: strings, listas, tuplas, dicionários, arquivos, classes e é orientada a objetos, aliás, em Python, tudo é um objeto [24].

O Sage Mathematics visa a construção de um programa de código aberto e gratuito para a solução de problemas matemáticos por alunos desde níveis intermediários até professores e pesquisadores nas diversas áreas de concentração da matemática, tais como álgebra, geometria, teoria dos números, cálculo, computação numérica, etc. Além disto o software busca servir de interface entre os diversos programas existentes, algumas das suas potencialidades incluem cálculo de derivadas através do comando `derivative(f(x),x)` que permite calcular derivadas de forma imediata. Este comando foi utilizado regularmente nos diversos exercícios criados ao longo deste trabalho. Assim como, resolução de equações, cálculo de valores exatos e construção de gráficos.

[1] Linguagem de programação

3.2 MegUA

MegUA [11] é um pacote de software para Sage Mathematics, onde estão concentrados muitos pacotes matemáticos, que permite a construção de exercícios parametrizados e respectivas resoluções, os exercícios são escritos em linguagem tipográfica LaTeX. A geração de novos exercícios acontece por substituição automática, podendo ser aleatória, de parâmetros por valores numéricos ou funções. A linguagem de programação usada é o Python na qual está programado o acesso às bibliotecas do Sage Mathematics.

Este projeto está a ser construído sobre a plataforma Sage Mathematics [24]. Os autores deste projeto tem como objetivo criar e disponibilizar em rede, quer para professores, investigadores e alunos, um conjunto de exercícios onde o utilizador discente pode aferir os seus conhecimentos e o utilizador didata pode diversificar e intensificar os exercícios e problemas de uma forma mais eficiente com vista a melhorar o processo ensino aprendizagem. Uma mais valia deste projeto é a possibilidade do professor criar um exercício com várias versões e disponibilizar a correspondente resolução detalhada e personalizada.

> "O detalhe da resolução estará de acordo com o perfil do aluno utilizador, tendo sempre em conta aspetos didáticos do tópico em estudo, contendo justificações dos vários passos e referência a alguns dos resultados utilizados para tirar as conclusões adequadas, e aspetos pedagógicos [5]."

O MegUA, é um complemento útil ao processo ensino aprendizagem que permite aos alunos um estudo autónomo, e ao professor possibilita uma diversificação de exercícios e problemas que promovem uma aprendizagem efetiva dos seus alunos.

O nome “MegUA” é uma marca registada da Universidade de Aveiro desde 2012.

3.2.1 Criar um Exercício

Para criar um exercício é necessário ter conhecimento de LaTeXe de programação básica em Python. Cada exercício contém em linguagem LaTeX: um texto com o enunciado, um texto com as respostas em formato escolha múltipla, outro com a resolução detalhada, e uma parte de programação em Python. Os exercícios parametrizados são criados num ficheiro notebook do Sage Matematics pelo utilizador que possui um número e um código de identificação, esta função tem a vantagem de ver os resultados imediatamente e poder partilhar com os outros autores [11].

Um exemplo de parametrização para uma função do tipo, $f(x) = ax^2+bx+c$, onde a, b, e c são parâmetros gerados aleatoriamente a partir de um conjunto finito de elementos, por exemplo, $a, b \in [-9, 9] \setminus \{0\}$ e $c \in [-9, 9]$, o programa gera uma grande quantidade de funções quadráticas, por geração aleatória dos parâmetros e a sua derivada é calculada com uma única instrução (ver figura 3.1): `derivative(função, x)` que calcula a derivada da função gerada em ordem a x. Também é possível a construção de gráficos, por exemplo (ver figura 3.2), recorrendo à instrução `plot(f(x),xmin,xmax)`.

Os exercícios elaborados neste trabalho estão disponíveis numa aplicação aberta SIACUA [25], que implementa um modelo Bayesiano do utilizador. A cada utilizador está associada uma rede Bayesiana, que incluí o mapa conceptual do assunto em estudo, a qual é atualizada após cada evidência de conhecimento (ou desconhecimento) recolhida, e o utilizador tem acesso ao seu progresso. O modelo foi proposto e testado com alunos simulados [13] e

```
class E26A03_Derivadas_002(Exercise):

    def make_random(s):
        x=var('x')
        s.a0 = ur.iunif_nonset(-9, 9, [0])
        s.b0 = ur.iunif_nonset(-9, 9, [0])
        s.c0 = ur.iunif(-9, 9)

    def solve(s):
        s.f0=s.a0*x^2+ s.b0*x+s.c0
        s.derf0=derivative(s.f0,x)
        s.mod_b0=abs(s.b0)
```

Figura 3.1: Função quadrática

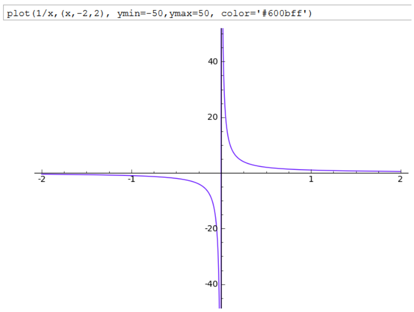

Figura 3.2: Gráfico

alunos reais através de um teste computarizado com questões de verdadeiro ou falso do PmatE [22] e um exame escrito, ambos projetados para medir o conhecimento dos alunos em diversos conceitos de um tema específico [12].
A aplicação foi desenhada e criada pelos docentes Luís Descalço (responsável pela programação) e Paula Carvalho (responsável pelos conteúdos) e inclui trabalho de diversos docentes e estudantes da Universidade de Aveiro [25]. O sistema está em desenvolvimento e continua-se a implementar exercícios.

3.2.2 Exemplos de exercícios criados

Nesta secção será apresentada detalhadamente a criação de dois, selecionados de entre os vários exercício criados neste trabalho. A escolha destes exercícios tem como objetivo mostrar as potencialidades desta tecnologia a nível gráfico, cálculo numérico e simbólico, é de referir que cada exercício possui uma variedade de enunciados tão densa quanto o usuário pretenda.

Tendo em conta que os exercícios são destinados à web, e seguindo as orientações do tutorial do projeto [11], atempadamente foi pensado o exercício e os conceitos teóricos, escreveu-se o problema e respetivos parâmetros, seguido da resolução completa e detalhada baseada nos parâmetros definidos no problema, e só depois se escreveu as opções de escolha múltipla.

Os valores do exercício foram escolhidos com cuidado, foram previstas todas as situações, para todos os parâmetros, tendo em conta que estes são gerados aleatoriamente entre um conjunto de elementos.

Passando à fase de implementação do exercício, procedeu-se à criação do exercício no servidor. Cada exercício é caracterizado no sumário , com o objetivo de o catalogar, e são definidas as palavras chaves. De seguida a identificação do utilizador e os dados para o SIACUA, onde é colocado o nível de dificuldades (entre 1 e 5), os conceitos abordados e respetivos pesos (entre 0 e 1), como se pode observar:

```
meg.save( r'''
%summary: derivadas de funções, monotoniae extremos
Palavras chave: funções, derivadas, monotonia, extremos
Maria Laurinda Carreira Barros
Mestrado em Matemática para professores
Tema: Recursos digitais de apoio ao ensino das derivadas
```

```
Abril 2014
SIACUAstart}
 level=5;  slip= 0.2; guess=0.25; discr = 0.3
 concepts = [(4452, 0.3)(4454, 0.7)]
 SIACUAend}
```

O problema e os respetivos parâmetro, são criados em `%problem` , tendo o cuidado que o nome deve ser curto, após `%answer` no bloco de escolha múltipla são colocadas as respostas pretendidas, sendo sempre a primeira opção a opção correta:

```
<multiplechoice>
<choice><p>$f\,'(x)=rc1$</p></choice>
<choice><p>$f\,'(x)=re2$</p></choice>
<choice><p>$f\,'(x)=re3$</p></choice>
<choice><p>$f\,'(x)=re4$</p></choice>
</multiplechoice>
```

O enunciado e a resolução detalhada, são escritos em LaTeX, para fazer produção de valores é necessário programar em Python/Sagemath, logo após `class E26A03_Derivadas_001(Exercise)`.

A função `def solve(s):` permite definir funções, condições, resolver equações, derivadas, integrais, fazer gráficos e muito mais. Segue dois exemplos de exercícios criados.

3.2.2.1 Mestrado:derivadas_027

Tem como objetivo estudar os intervalos de monotonia e extremos de uma função do tipo $f(x) = \dfrac{e^{ax}}{bx+c}$.

Para isso, define-se os parametros $a0$, $b0$, e $c0$, a variar de um conjunto finito de elementos, mais precisamente, $a0, b0 \in [-5, 5] \setminus \{0\}$ e $c0 \in [-9, 9]$ (ver tabela 3.1).

```
class E26A03_Derivadas_027(Exercise):

def make_random(s):
    x=var('x')
    s.a0 = ur.iunif_nonset(-5, 5,[0])
    s.b0 = ur.iunif_nonset(-5, 5,[0])
    s.c0 = ur.iunif(-9, 9)
```

Tabela 3.1: Parametros do exercício Mestrado:Derivadas_027

Após o comando `def solve(s):` é definida a função, a sua derivada, os valores para a resolução, respetivas opções de escolha múltipla, gráficos, assim como todos os cálculos auxiliares que facilitem a escrita da resposta.

Neste exercício como existem diversas situações a considerar, utilizou-se a sintaxe <showone variavel>, que permite mostrar cada uma das opções correspondentes a diferentes situações, como se mostra na tabela 3.2.

Na parte da programação, foi necessário identificar a frase a ser escolhida, dando um valor apropriado à variável `s.id1` $= 0$ ou 1 para decidir sobre o texto apropriado.

Na resolução teve-se em consideração o público alvo, adotando linguagem e termos em conformidade com o nível académico do destinatário. Neste caso os exercícios destinam-se a alunos do ensino secundário, pelo que a seleção de valores, a resolução e explicação, recorrendo também, a uma pequena nota teórica, foi feita de acordo com realidade escolar de um aluno de Matemática A que frequente 11.º e 12.º ano.

Mostra-se a seguir uma concretização deste exercício correspondente aos valores dos parâmetros, $a = -2$, $b = -4$ e $c = -6$.

%answer

<multiplechoice>

<choice><p>
<showone id1>

<thisone Caso k1<0 - (isto é comentário)>
$f(x)$ é crescente em $[k1, d0m[$ e em $]d0m, +\infty[$, decrescente em $]-\infty, k1]$
e tem um mínimo para $x = k1$.
</thisone>

<thisone Caso diferente de k1<0 - (isto é comentário)>
$f(x)$ é decrescente em em $[k1, d0m[$ e em $]d0m, +\infty[$, crescente em $]-\infty, k1]$
e tem um máximo para $x = k1$.

</showone>
</p></choice>
<choice><p>
<showone id1>

<thisone Caso k1<0 - (isto é comentário)>
$f(x)$ é decrescente em $[k1, d0m[$ e em $]d0m, +\infty[$, crescente em $]-\infty, k1]$
e tem um máximo para $x = k1$.
</thisone>

<thisone Caso diferente de k1<0 - (isto é comentário)>
$f(x)$ é crescente em em $[k1, d0m[$ e em $]d0m, +\infty[$, decrescente em $]-\infty, k1]$
e tem um mínimo para $x = k1$.
</showone>
</p></choice>

<choice><p>$f(x)$ é decrescente em $\mathbb{R} \setminus \{d0m\}$ </p></choice>

<choice><p>$f(x)$ é crescente em $\mathbb{R} \setminus \{d0m\}$ </p></choice>

</multiplechoice>

Tabela 3.2: Opções de resposta ao exercício Mestrado:Derivadas_027

Problema

Seja a função f definida em $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$ por $f(x) = \frac{e^{(-2x)}}{-4x-6}$.

Podemos afirmar que:

Resolução

Escolha:

$f(x)$ é crescente em $[-2, -\frac{3}{2}\,[$ e em $]-\frac{3}{2}, +\infty[$, decrescente em $]-\infty, -2]$ e tem um mínimo para $x = -2$.

Escolha:

$f(x)$ é decrescente em $[-2, -\frac{3}{2}\,[$ e em $]-\frac{3}{2}, +\infty[$, crescente em $]-\infty, -2]$ e tem um máximo para $x = -2$.

Escolha:

$f(x)$ é decrescente em $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$

Escolha:

$f(x)$ é crescente em $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$

Figura 3.3: Pré visualização do exercício

Para as respostas erradas, foi pensado nos erros mais comuns que os alunos cometem quando calculam derivadas. Por exemplo, na aplicação das regra das derivadas, operações com sinais e mesmo no cálculo de equações.

3.2.2.2 Mestrado:derivadas_029

A escolha deste exercício, deve-se ao facto de explorar o comando `plot(f(x),xmin,xmax)`. Este exercício pretende relacionar o gráfico da segunda derivada com a função. O enunciado do exercício pode-se ver na tabela 3.3.

E a escolha múltipla na tabela 3.4.

Os valores e os gráficos são parametrizados, ou seja, ocorrem por substituição automática e aleatória de parametros, por valores numéricos ou funções,

```
Considere a função f cujo gráfico se encontra parcialmente representado
na figura.  <p>
f é uma função que admite segunda derivada em ℝ.
</td>

<td> <center>
fig_funcao
</center></td>
</tr>
</table>

Qual dos seguintes gráficos pode representar a função g(x) = −f''(x)?
```

Tabela 3.3: Enunciado do exercício Mestrado:Derivadas_029

```
<multiplechoice>
<choice> <center> fig_certa </center> </choice>

<choice> <center> fig_errada1 </center> </choice>

<choice> <center> fig_errada2 </center> </choice>

<choice> <center> fig_errada3 </center> </choice>
</multiplechoice>
```

Tabela 3.4: Escolha múltipla do exercício Mestrado:Derivadas_029 escolhidos a partir de um conjunto de valores pré-definidos.

Neste caso, foi feita a geração de uma lista, com os casos pretendidos, de seguida incorporou-se na parte da programação, através do comando $s.lf1 = [sin(x), s.a0 * x^3 - s.b0, s.a0 * x^2 - s.b0]$, o programa faz a seleção aleatória dum elemento dessa lista e gera o exercício.

Com o auxílio dos comandos `integral(s.f1,x)` e `derivative(s.f1,x)`, escolheu-se as opções para gerar os gráficos da escolha múltipla, como se pode observar na tabela 3.5, procedeu-se de igual forma para os restantes gráficos. Para as respostas erradas, e tendo em conta os erros comuns cometidos pelos alunos, optou-se pelo gráfico da primeira, segunda e simétrico da primeira derivada.

```
s.derf11 = derivative(s.f11,x)
p4 = plot([s.derf11], x,s.xmin,s.xmax,color='blue',
axes_labels=['x','y'],)
legend_derf11 = text( r'y = %s' % latex(s.derf11),
(s.xmax , s.derf11(x= s.xmax ) ))
fig_completa4 = p4
s.fig_errada2=s.sage_graphic(fig_completa4, "fig4", dimx=6, dimy=6)
```

Tabela 3.5: Resposta errada do exercício Mestrado:Derivadas_029

Estes dois exemplos, são uma pequena demonstração das potencialidades deste programa, com um só exercício criado pelo professor, o aluno tem acesso a diferentes exercícios sobre o mesmo tema, podendo assim consolidar os conteúdos. O professor não tem a necessidade de reproduzir repetidamente exercícios do mesmo tipo e o aluno pode trabalhar autonomamente e ter acesso detalhado às resoluções para esclarecimento de dúvidas.

Capítulo 4

Conclusões

O objetivo deste trabalho é a criação de recursos digitais de apoio ao ensino das derivadas, através da construção de exercícios parametrizados, para serem partilhados, principalmente entre alunos do ensino secundário e docentes com interesse no assunto.

A evolução das novas tecnologias e a sua aplicabilidade ao ensino facilita a comunicação no meio educativo e contribui favoravelmente para a evolução e diversificação de método de ensino, o uso de recursos digitais no processo ensino aprendizagem é uma realidade na sala de aula.

O MegUA é uma ferramenta poderosa, permite ao professor elaborar com rapidez e eficácia exercícios diversificados. O aluno tem oportunidade de resolver exercícios diversificados e ao aceder à sua resolução detalhada é estimulada a sua autonomia.

A resolução detalhada dos exercícios, é feita tendo em conta o aluno, daí a experiência do professor ser um fator importante, pois prevê atempadamente as principais dificuldades do aluno e as dúvidas habituais.

Na resolução, todos os passos são detalhadamente apresentados, sempre que achar pertinente estão contidas na resolução notas teóricas, tendo em conta o cariz didático e a evolução do aluno.

O professor ao usar a sua experiência letiva, pode selecionar os exercícios de forma profícua para construir a sua própria base de dados de exercícios. No futuro, pode utilizá-los ou reutilizá-los, na construção de material de apoio, tanto em exercícios de treino, como de avaliação. O programa ao gerar diferentes questões sobre o mesmo conteúdo, facilita o trabalho do professor, ficando este com tempo para se dedicar a outras tarefas. O MEGUA é assim, um complemento útil ao estudo autónomo do aluno e uma ferramenta importante do professor.

Os exercícios criados neste trabalho estão disponíveis no SIACUA [25], plataforma aberta a qualquer utilizador, na secção do ensino secundário, sob o tema derivadas. Os alunos ao acederem à plataforma, podem estudar autonomamente e testar os resultados da sua aprendizagem através da resolução de questões de escolha múltipla, sobre o estudo de derivadas.

Esta dissertação foi escrita em linguagem tipográfica LaTeX, usou-se o software *Geogebra*, para traçar gráficos, que posteriormente foram exportados para LaTeX. Na criação dos exercícios utilizou-se programação em Python.

No CD inclui-se a concretização completa (enunciado e resolução) de cada exercício criado.

Não há evolução sem desafio. Este projeto foi um desafio que encarei como um enriquecimento pessoal e profissional. Ao aceitá-lo, saí da minha zona de conforto, deparei-me com situações novas e superei obstáculos que cheguei a considerar insuperáveis. Desde do início, foi uma experiência nova e gratificante, aprendi a escrever em LaTeX, a fazer programação básica em Python, e principalmente reaprendi a ser critica em relação ao meu trabalho.

A criação de exercícios deu-me imenso prazer, embora não domine programação, com apenas conhecimentos básicos, consegui fazer exercícios interessantes. Contudo o processo ainda é embrionário, e a diversificação de exercícios pode e deve ser explorada.

Agora, é um prazer ver os exercícios criados, numa plataforma ao dispor de todos, para serem usados para treino, tanto pelos meus alunos, como por outros que estão à distância de um click.

Bibliografia

[1] Apostol, Tom M., *Análisis Matemático*, 2ª Edição, Editora Reverté, 2006.

[2] Apostol, Tom M., *Cálculo*, Volume I, Editora Reverté, 1988.

[3] Bivar, A.; Grosso, C.; Loura, L.; Oliveira, F. e Timóteo, M.C., *Cadernos de Apoio, Matemática A 11.º Ano e 12.º Ano*, Ministério da Educação, 2013.

[4] Boyer, Carl, *História da Matemática*, Editora Edgard Blücher, 1996.

[5] Cruz, Pedro; Seabra, Dina e Oliveira, Paula *Crie o seu arquivo de exercícios resolvidos parametrizados*, Gazeta nº 170, pág. 26, 01/07/2013, 2013.

[6] Damião, H. e Festa, I., *Programa e Metas Curriculares* , Matemática A, 12.º Ano, Ministério da Educação, 2013.

[7] Eves, Howard, *Introdução à história da matemática*, Editora da Unicamp, 2011.

[8] Ferreira, J. Campos, *Introdução à análise matemática*, Fundação Calouste Gulbenkian, 1999.

[9] Martins, João Pavão, *Programação em Python: Introdução à Programação Utilizando Múltiplos Paradigmas*, Universidade Técnica de Lisboa.

[10] Matemática A, *Questões de Exames Nacionais e Testes Intermédios do 12.º Ano- Funções e Complexos*, Volume III, GAVE, 1999.

[11] Megua, Mathematics Exercise Generator, Universidade de Aveiro (Megua), `http://cms.ua.pt/megua/`.

[12] Millán, Eva; Descalço, Luís; Castillo, Gladys; Oliveira, Paula e Diogo, Sandra; *Using Bayesian networks to improve knowledge assessment*, Computers and Education, Volume 60, Issue 1, January 2013, Pages 436-447.

[13] Millán, Eva, *Thesis: Bayesian system for student modeling.* Al Comum. 13(4): 277-278, 2000.

[14] Nápoles, Suzana Metello, *O que é um Ponto de Inflexão?*, Gazeta de Matemática nº 140, janeiro 2011.

[15] Neves, M.A.F; Pereira, A. e Silva J.N., *Matemática A - 11.º Ano e 12.º Ano*, Volume 2, Porto Editora, 2011.

[16] NÓNIO, *Estratégias para a acção: As TIC na educação*, Lisboa, Ministério da Educação, 2002.

[17] Ostrowski, A. *Lições de Cálculo Diferencial e Integral*, Volume 1, Fundação Calouste Gulbenkian, 1967.

[18] Pimenta, P., *Y 11- Matemática A*, Volume 2, Texto Editores, 2011.

[19] Pimenta, P., *Y 12- Matemática A*, Volume 2, Texto Editores, 2012.

[20] Piskounov, N. *Cálculo Diferencial e Integral*, Volume 1, Edições Lopes da Silva, 2000.

[21] Plano Tecnológico da Educação (2007). *Plano Tecnológico da Educação* `http://www.pte.gov.pt/pte/PT/OPTE/index.htm`.

[22] Pmate, `http://pmate4.ua.pt/hexeris/`.

[23] Python, `http://phylos.net/computacao/sage/`.

[24] Sage notebook, `http://www.sagemath.org`.

[25] Sistema Interativo de Aprendizagem, Universidade de Aveiro (Siacua), `http://siacua.web.ua.pt/`.

[26] Silva, J. C., Fonseca, M. G., Martins, A. A., Fonseca, C.M. C. Lopes, I. M. C., *Programa de Matemática A, 11.º e 12.º ano* , Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário, Lisboa 2002.

[27] Struik, D., *História Concisa das Matemáticas.* Gradiva, 1997.

[28] Stwart, James *Cálculo*, Volume I, Pioneira Thomson Learning, 2006.

[29] Swokowski, Earl W. *Cálculo*, Volume 1, McGraw-Hill, 1983.

[30] Viegas, Cristina e outros, *XeqMat 12*- Matemática A 12.º, volume 2, Texto, 2012.

Anexos

Apêndice A

Listagem dos exercícios criados

E26A03_Derivadas_009

```
meg.save( r'''
%summary derivadas de funções: equação reduzida da reta tangente
Palavras chave: funções, derivadas, regras derivação
SIACUAstart
level=4;  slip= 0.2; guess=0.25; discr = 0.3
concepts = [(4451, 0.5),(4452, 0.5)]
SIACUAend
%problem equação reduzida da reta tangente
Sejam $f$ uma função real de variável real definida em $\mathbb{R}$
por $$f(x)=f0$$ então a equação reduzida da reta tangente
```

```
ao gráfico de $f$ no ponto de abcissa e0 é:
%answer
<multiplechoice>
<choice><p>$$y = rc1 $$</p></choice>
<choice><p>$$y = re2 $$</p></choice>
<choice><p>$$y = re3 $$</p></choice>
<choice><p>$$y = re4 $$</p></choice>
<choice><p>$$y = re5 $$</p></choice>
</multiplechoice>
Uma equação da reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto de abcissa
$e0$,  é
$$ y=mx+b$$
sendo $m =f'(e0)$ o declive da reta e $b$ a ordenada na origem.
Sendo  $$f(x)=f0$$, recorrendo às regras da derivação:
$$f'(x)= derf0$$
Assim, a reta tangente ao gráfico da função $f$, no ponto
de abcissa $e0$, tem declive:
$$m=f'(e0)=valorderf0$$
A sua equação reduzida é, portanto, da forma,
$y=valorderf0 x + b$.
O ponto de tangência é $(e0, f(e0))$ , ou seja $(e0, valorf0)$.
Vem então:
\begin{eqnarray*}
     valorf0&=& valorderf0 \times sgnd_e0 e0 sgne_e0 + b\\
           b &=& valorf0 sgn_k0 modk0 \\
           b &=& k1
```

```
\end{eqnarray*}
Portanto, a equação reduzida da reta é $y = rc1$, como se pode
observar na figura abaixo:
    <center>
fig1
</center>
class E26A03_Derivadas_009(Exercise):
    def make_random(s):
        x=var('x')
#coeficientes da função
        s.a0 = ur.iunif_nonset(-9, 9, [0])
        s.b0 = ur.iunif(-9, 9)
        s.c0 = ur.iunif(-9, 9)
        s.d0 = ur.iunif_nonset(-9, 9, [0])
        s.e0 = ur.iunif_nonset(-2, 2, [-1])
    def solve(s):
        s.f0=s.a0*x^3+ s.b0*x^2+s.c0*x+s.d0 #função
        s.derf0=derivative(s.f0,x)
#ordenada do ponto
        s.valorf0=s.f0(x=s.e0)
#declive da reta tangente
        s.valorderf0=s.derf0(x=s.e0)
#calculos auxiliares para determinar b (y=mx+b)
        s.k0=s.valorderf0*s.e0       # Cálculo de m*x
        s.k1=s.valorf0-s.k0          # Cálculo de b
        s.modk0=abs(s.k0)
```

```
#respostas
        s.rc1=s.valorderf0*x+s.k1
        s.re2=-s.valorderf0*x-s.k1
        s.re3=s.e0
        s.re4=s.valorderf0*x
        s.re5=-s.valorderf0*x
# Cálculo e Teste dos Sinais
        if s.k0>0:
           s.sgn_k0='-'
        else:
           s.sgn_k0='+'
        if s.e0<0:
           s.sgnd_e0='('
           s.sgne_e0=')'
        else:
           s.sgnd_e0=''
           s.sgne_e0=''
#gáfico da função e reta tangente
        #s.inf1 = -5 #limite inferior do domínio
        #s.sup1 = 5 #limite superior do domínio
        s.inf1 = -s.e0-1 #limite inferior do domínio
        s.sup1 =  s.e0+1#limite superior do domínio
        g1 = plot(s.f0,x, s.inf1, s.sup1, color='blue')
        g2 = plot(s.rc1,x, s.inf1, s.sup1,  color='red')
        s.fig1 = s.sage_graphic( g1+g2, "fig1", dimx=7, dimy=7) #7cm
''')
```

Enunciado

Sejam f uma função real de variável real definida em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = 3\,x^3 - 6\,x^2 - 8\,x - 6$$

então a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 2 é:

(A) $y = 4\,x - 30$

(B) $y = -4\,x + 30$

(C) $y = 2$

(D) $y = 4\,x$

(E) $y = -4\,x$

Proposta de resolução

Uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 2, é

$$y = mx + b$$

sendo $m = f'(2)$ o declive da reta e b a ordenada na origem. Sendo

$$f(x) = 3\,x^3 - 6\,x^2 - 8\,x - 6$$

, recorrendo às regras da derivação:

$$f'(x) = 9\,x^2 - 12\,x - 8$$

Assim, a reta tangente ao gráfico da função f, no ponto de abcissa 2, tem declive:

$$m = f'(2) = 4$$

A sua equação reduzida é, portanto, da forma, $y = 4x + b$. O ponto de tangência é $(2, f(2))$, ou seja $(2, -22)$. Vem então:

$$\begin{aligned} -22 &= 4 \times 2 + b \\ b &= -22 - 8 \\ b &= -30 \end{aligned}$$

Portanto, a equação reduzida da reta é $y = 4\,x - 30$, como se pode observar na figura abaixo:

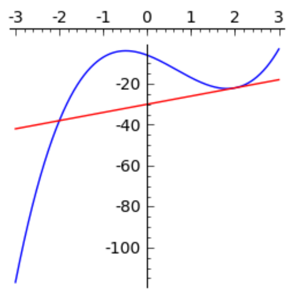

Figura A.1: Reta tangente a f no ponto $x = 2$

E26A03_Derivadas_027

```
meg.save( r'''
%summary derivadas de funções:monotonia, extremos
Palavras chave: funções, derivadas, monotonia, extremos
SIACUAstart
level=5;  slip= 0.2; guess=0.25; discr = 0.3
concepts = [(4452, 0.3)(4454, 0.7)]
SIACUAend
```

```
%problem monotonia e extremos relativos
Seja a função $f$ definida em $\mathbb{R} \setminus \{d0m\}$
por $f(x)=\frac{u0}{v0}$.
Podemos afirmar que:
%answer
<multiplechoice>
<choice><p>
<showone id1>
 <thisone Caso k1<0 - (isto é comentário)>
$f(x)$ é crescente em $ [ k1,d0m [$ e em $]d0m , + \infty[$ ,
decrescente em ${\left ]- \infty, k1\right]}$
e tem um mínimo para $x=k1$.
</thisone>
<thisone Caso diferente de k1<0 - (isto é comentário)>
$f(x)$ é decrescente em em $ [ k1,d0m [$ e em $]d0m , + \infty[$,
crescente em ${\left ]- \infty, k1\right]}$
e tem um máximo para $x=k1$.
</showone>
</p></choice>
<choice><p>
<showone id1>
<thisone Caso k1<0 - (isto é comentário)>
$f(x)$ é decrescente em $ [ k1,d0m [$ e em $]d0m , + \infty[$ ,
crescente em ${\left ]- \infty, k1\right]}$ e tem um máximo
para $x=k1$.
</thisone>
```

```
<thisone Caso diferente de k1<0 - (isto é comentário)>
$f(x)$ é crescente em em $ [ k1,d0m [$ e em $]d0m ,
+ \infty[$, decrescente em ${\left ]- \infty, k1\right]}$
e tem um mínimo para $x=k1$.
</showone>
</p></choice>
<choice><p>$f(x)$ é decrescente em $\mathbb{R}
\setminus \{d0m\}$ </p></choice>
<choice><p>$f(x)$ é crescente em $\mathbb{R}
\setminus \{d0m\}$ </p></choice>
</multiplechoice>
\begin{eqnarray*}
     f'(x)&=& {\left[\frac{u0}{v0} \right]}'\\
          &=& \frac {(u0)' \cdot (v0) - u0
          \cdot (v0)'}{(v0)^2}\\
          &=& \frac {deru0 \cdot (v0) - (u0)
          \cdot (derv0)}{(v0)^2}\\
          &=& \frac {u0_0}{(v0)^2}
\end{eqnarray*}
Para $x\in \mathbb{R} \setminus \{d0m\}$, tem-se:
\begin{eqnarray*}
     f'(x)=0&\Leftrightarrow& \frac {u0_0}{(v0)^2} = 0\\
            &\Leftrightarrow& u0_0 = 0\\
            &\Leftrightarrow& e^{w0} {\left(k0 \right)} = 0\\
            &\Leftrightarrow& k0 = 0\\
            &\Leftrightarrow& x = k1\\
```

```
\end{eqnarray*}
<style>
        table,td,th
        {
        border:0px solid black;
        border-collapse:collapse;
        }
        td
        {
        text-align:left;
        }
</style>
<table width="900">
 <tr>
<td>
 O gráfico de $f'(x)$ ajuda a completar
 facilmente o quadro de sinais.
</td>
<td> <center>
fig_derfuncao
</center></td>
</tr>
</table>
Quadro de sinais da derivada:
<p>
<showone id1>
```

```
<thisone Caso (s.extrem0 -s.dom) < 0 - (isto é comentário)>
\begin{array}{|c|c|c|}
\hline
x     &  - \infty & k1  &    & d0m & + \infty \\
\hline
f'(x) & sinal1  & 0   & sinal2  &  & sinal2  \\
\hline
x     & monot1  & f{\left(k1\right)}= valorf0
& monot2 & n.d. & monot2 \\
\hline
\end{array}
</thisone>
<thisone Caso diferente de (s.extrem0 -s.dom) < 0
- (isto é comentário)>
\begin{array}{|c|c|c|}
\hline
x     &  - \infty & d0m  &    & k1 & + \infty \\
\hline
f'(x) & sinal1  & 0   & sinal2  &  & sinal2  \\
\hline
x     & monot1  & f{\left(k1\right)}= valorf0
& monot2 & n.d. & monot2 \\
\hline
 </thisone>
</showone>
(n.d.= não definida)
```

```
Conclusão:
<showone id1>
<thisone Caso (s.extrem0 -s.d0m) < 0 - (isto é comentário)>
$\bullet$ $f(x)$ é crescente em $ [ k1,d0m [$ e em $]d0m ,
 + \infty[$
$\bullet$ $f(x)$ é decrescente em ${\left ]- \infty, k1\right]}$
$\bullet$ $f(x)$ tem um mínimo para $x=k1$, sendo esse mínimo
$f{\left(k1\right)}=valorf0$
</thisone>
<thisone Caso diferente de (s.extrem0 -s.d0m) < 0 - (isto é
comentário)>
$\bullet$ $f(x)$ é decrescente em em $ [ k1,d0m [$ e em $]d0m ,
+ \infty[$
$\bullet$ $f(x)$ é crescente em ${\left ]- \infty, k1\right]}$
$\bullet$ $f(x)$ tem um máximo para $x=k1$, sendo esse máximo
$f{\left(k1\right)}=valorf0$
 </thisone>
</showone>
 <style>
        table,td,th
        {
        border:0px solid black;
        border-collapse:collapse;
        }
        td
        {
```

```
        text-align:left;
        }
</style>
<table width="900">
 <tr>
<td>
 O esboço do gráfico da  função da função $f(x)$ é (note-se que
 $x= d0m$ é uma assimptota):
</td>
<td> <center>
fig_funcao
</center></td>
</tr>
</table>
class E26A03_Derivadas_027(Exercise):
    def make_random(s):
        x=var('x')
        s.a0 = ur.iunif_nonset(-5, 5,[0])
        s.b0 = ur.iunif_nonset(-5, 5,[0])
        s.c0 = ur.iunif(-9, 9)
        s.aux1 = ur.random_element( [  1, 2, 3] )  #variável
        auxiliar para definir o rectangulo de visualização da figura
    def solve(s):
        s.w0=s.a0*x
        s.u0=exp(s.w0)
        s.v0=s.b0*x+s.c0
```

```
s.d0m = -s.c0/s.b0
s.f0=s.u0/s.v0
s.derf0=derivative(s.f0,x)   #derivada da função
s.deru0=derivative(s.u0,x)
s.derv0=derivative(s.v0,x)
s.u0_0=s.deru0*s.v0-s.u0*s.derv0
s.k0=s.a0*(s.b0*x+s.c0)-s.b0
s.k1=(s.b0-s.a0*s.c0)/(s.a0*s.b0)
#zero da derivada
s.valorf0=s.f0(x=s.k1)
# valor da função em k1
s.extrem0=s.derf0(x=(s.valorf0-1))
if s.derf0(x=(s.valorf0-1)) < 0:
   s.sinal1 = '+'
   s.sinal2 = '-'
   s.monot1 = r'\nearrow'
   s.monot2 = r'\searrow'
else:
   s.sinal1 = '-'
   s.sinal2 = '+'
   s.monot1 = r'\searrow'
   s.monot2 = r'\nearrow'
if (s.extrem0 -s.d0m) > 0:
   s.id1=0
else:
   s.id1=1
```

```
        if s.k1 > 0:
           s.xmin= s.k1-2*s.aux1
           s.xmax= s.k1+s.aux1
        else:
           s.xmin= s.k1-s.aux1
           s.xmax= s.k1+2*s.aux1
        p1 = plot([s.f0], x,s.xmin,s.xmax, ymin=-50, ymax=50,
        color='blue',axes_labels=['$x$','$y$'])
        legend_f0 = text( r'$y=%s$' %latex(s.f0), (s.xmax ,
        s.f0(x= s.xmax )+10 ))
        fig_funcao_completa = p1   + legend_f0
        s.fig_funcao=s.sage_graphic(fig_funcao_completa,
        "fig2", dimx=10, dimy=10)
        p2 = plot([s.derf0], x,s.xmin,s.xmax, ymin=-50,
        ymax=50, color='blue',axes_labels=['$x$','$y$'])
        legend_derf0 = text( r'$y=%s$' %latex(s.derf0),
        (s.xmax , s.derf0(x= s.xmax )+10 ))
        fig_funcao_completa = p2   + legend_derf0
        s.fig_derfuncao=s.sage_graphic(fig_funcao_completa,
         "fig1", dimx=10, dimy=10)
''')
```

Enunciado

Em relação à função f definida em $\mathbb{R}\setminus\{\frac{5}{3}\}$ por $f(x) = \frac{e^x}{3\,x-5}$

Podemos afirmar que:

(A) $f(x)$ é crescente em $[\frac{8}{3}, \frac{5}{3}[$ e em $]\frac{5}{3}, +\infty[$, decrescente em $\left]-\infty, \frac{8}{3}\right]$ e tem um mínimo para $x = \frac{8}{3}$.

(B) $f(x)$ é decrescente em $[\frac{8}{3}, \frac{5}{3}[$ e em $]\frac{5}{3}, +\infty[$, crescente em $\left]-\infty, \frac{8}{3}\right]$ e tem um máximo para $x = \frac{8}{3}$.

(C) $f(x)$ é decrescente em $\mathbb{R} \setminus \{\frac{5}{3}\}$

(D) $f(x)$ é crescente em $\mathbb{R} \setminus \{\frac{5}{3}\}$

Proposta de resolução

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left[\frac{e^x}{3\,x-5}\right]' \\
&= \frac{(e^x)' \cdot (3\,x-5) - e^x \cdot (3\,x-5)'}{(3\,x-5)^2} \\
&= \frac{e^x \cdot (3\,x-5) - (e^x) \cdot (3)}{(3\,x-5)^2} \\
&= \frac{(3\,x-5)e^x - 3\,e^x}{(3\,x-5)^2}
\end{aligned}$$

Para $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{5}{3}\}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
f'(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{(3\,x-5)e^x - 3\,e^x}{(3\,x-5)^2} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (3\,x-5)e^x - 3\,e^x = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad e^x(3\,x-8) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 3\,x-8 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

O gráfico de $f'(x)$, ver figura A.2, ajuda a completar facilmente o quadro de sinais.

Quadro de sinais da derivada, tabela A.1:

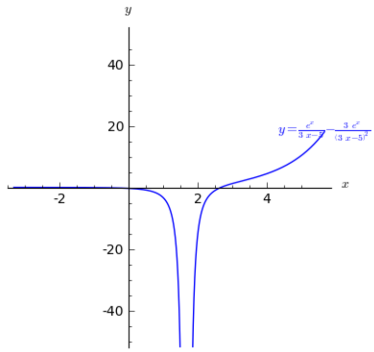

Figura A.2: Grádico de f

x	$-\infty$	$\frac{8}{3}$		$\frac{5}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$f\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{1}{3}e^{\frac{8}{3}}$	$\nearrow$	$n.d.$	$\nearrow$

Tabela A.1: Quadro de sinais

n.d.= não definida

Conclusão:

- $f(x)$ é crescente em $[\frac{8}{3}, \frac{5}{3}[$ e em $]\frac{5}{3}, +\infty[$

- $f(x)$ é decrescente em $]-\infty, \frac{8}{3}]$

- $f(x)$ tem um mínimo para $x = \frac{8}{3}$, sendo esse mínimo $f\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{1}{3}\,e^{\frac{8}{3}}$

Na figura A.3, está o esboço do gráfico da função $f(x)$.

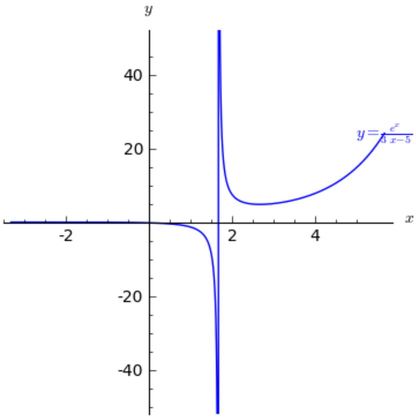

Figura A.3: Grádico de f

E26A03_Derivadas_029

```
meg.save( r'''
%summary derivadas de funções:relação entre o gráfico
da 2ª derivada e a função
Palavras chave: funções, derivadas, gráfico
SIACUAstart
level=5;  slip= 0.2; guess=0.25; discr = 0.3
concepts = [(4453, 0.5), (4454, 0.5)]
SIACUAend
%problem Relacionar a função com a derivada de ordem 2
 <style>
        table,td,th
        {
        border:0px solid black;
        border-collapse:collapse;
```

```
        }
        td
        {
        text-align:left;
        }
</style>
<table width="900">
 <tr>
<td>
Considere a função $f$ cujo gráfico se encontra parcialmente
 representado na figura. <p>
$f$ é uma função que admite segunda derivada em $\mathbb{R}$.
</td>
<td> <center>
fig_funcao
</center></td>
</tr>
</table>
Qual dos seguintes gráficos pode representar a função
$g(x)=-f''(x)$?
%answer
<multiplechoice>
<choice> <center> fig_certa </center>  </choice>
<choice> <center> fig_errada1 </center> </choice>
<choice> <center> fig_errada2 </center>  </choice>
<choice> <center> fig_errada3 </center> </choice>
```

```
</multiplechoice>
A segunda derivada dá-nos informação sobre o sentido das
concavidades do grá?co de uma função.<p>
\bf{Pelo teste da segunda derivada:}
Seja $f$ uma função duas vezes derivável num intervalo
aberto $I$,
$(i)$ Se $f" > 0$ para todo $x \in I$, então o gráfico
de $f(x)$ tem a concavidade voltada para cima em $I$.
$(ii)$ Se $f"< 0$ para todo $x \in I$, então o gráfico
de $f(x)$ tem a concavidade voltada para baixo em $I$.
O ponto de coordenadas $(a,\;f(a))$ é um ponto de
inflexão do gráfico da função $f$ se o sentido da concavidade
do gráfico muda nesse ponto.
Assim por observação do gráfico de $f$ conclui-se que o possível
gráfico de $f''(x)$ só poderá ser:
<center>
fig_errada1
</center>
Fazendo uma simetria em relação a $Ox$, obtemos o gráfico $g(x)$:
<center>
fig_certa
</center>
class E26A03_Derivadas_029(Exercise):
    def make_random(s):
        x=var('x')
        s.p0 = ur.random_element( [ -3,-2,-1, 0, 1,  2, 3 ] )
```

```
        s.a0   = ur.iunif_nonset(-3, 3,[0])
        s.b0   = ur.iunif(1,3)
        s.aux1 = ur.random_element( [  1, 2, 3,4] )
    def solve(s):
        s.lf1=[sin(x), s.a0*x^3- s.b0, s.a0*x^2-s.b0]
        s.id1= ZZ.random_element(len(s.lf1 ))
        s.f11 = s.lf1[s.id1]
        s.primitivaf11 = integral(s.f11,x)
        s.derf11 = derivative(s.f11,x)
        s.fp0=s.f11(x= s.p0)
        s.der2f11 = derivative(s.derf11,x)
        print("id1=", s.id1)
        if s.p0 > 0:
            s.xmin= s.p0-2*s.aux1
            s.xmax= s.p0+s.aux1
        else:
            s.xmin= s.p0-s.aux1
            s.xmax= s.p0+2*s.aux1
        p1 = plot([s.f11], x,s.xmin,s.xmax,
        color='blue',axes_labels=['$x$','$y$'])
        legend_f11 = text( r'$y=%s$'
        %latex(s.f11), (s.xmax , s.f11(x= s.xmax ) ))
        fig_funcao_completa = p1
        s.fig_funcao=s.sage_graphic(fig_funcao_completa,
        "fig1", dimx=7, dimy=7)
#s.ordenadap0 = s.primitivaf11(x= s.p0) #declive
```

```
        #s.tanp0= s.ordenadap0*x + (s.fp0-s.ordenadap0*s.p0)
        #p1 = plot([s.f11,s.tanp0], x,s.xmin,s.xmax, color='blue')
#grafico simétrico da 2ª derivada: -der2f11 (resposta correta)
        s.der_certa =derivative(-s.derf11,x)
        p2 = plot([s.der_certa], x,s.xmin,s.xmax,color='blue',
        axes_labels=['$x$','$y$'],)
        legend_der_certa = text( r'$y=%s$' % latex(s.der_certa),
        (s.xmax , s.der_certa(x= s.xmax ) ))
        fig_completa2 = p2
        s.fig_certa=s.sage_graphic(fig_completa2, "fig2",
        dimx=6, dimy=6)
#grafico da primeira resposta errada: der2f11
        s.der_errada1 = derivative(s.derf11,x)
        p3 = plot([s.der_errada1], x,s.xmin,s.xmax,
        color='blue',axes_labels=['$x$','$y$'])
        legend_der_errada1 = text( r'$y=%s$'
        % latex(s.der_errada1), (s.xmax , s.der_errada1(x= s.xmax ) ))
        fig_completa3 = p3
        s.fig_errada1=s.sage_graphic(fig_completa3,
        "fig3", dimx=6, dimy=6)
#grafico da segunda resposta errada: -derivadaf11
        s.derf11 = derivative(s.f11,x)
        p4 = plot([s.derf11], x,s.xmin,s.xmax,
        color='blue',axes_labels=['$x$','$y$'],)
        legend_derf11 = text( r'$y=%s$'
        % latex(s.derf11), (s.xmax , s.derf11(x= s.xmax ) ))
```

```
        fig_completa4 = p4
        s.fig_errada2=s.sage_graphic(fig_completa4,
        "fig4", dimx=6, dimy=6)
#grafico da terceira resposta errada: derivadaf11
        s.derf11 = derivative(-s.f11,x)
        p5 = plot([s.derf11], x,s.xmin,s.xmax,
        color='blue',axes_labels=['$x$','$y$'],)
        legend_derf11 = text( r'$y=%s$'
        % latex(s.derf11), (s.xmax , s.derf11(x= s.xmax ) ))
        fig_completa5 = p5
        s.fig_errada3=s.sage_graphic(fig_completa5,
        "fig5", dimx=6, dimy=6)
''')
```

Enunciado

Considere a função f cujo gráfico se encontra parcialmente representado na figura.

Seja f uma função que admite segunda derivada em $\mathbb{R}$.

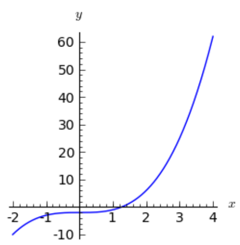

Figura A.4: Grádico de f

Qual dos seguintes gráficos pode representar a função $g(x) = -f''(x)$?

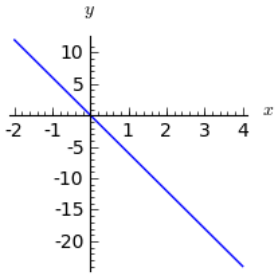

Figura A.5: Opção (A)

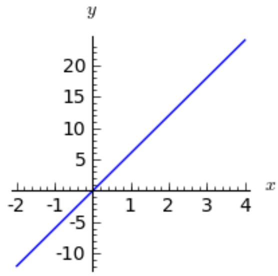

Figura A.6: Opção (B)

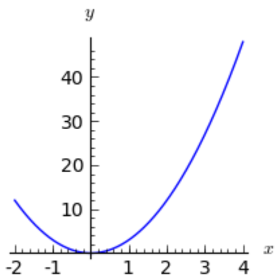

Figura A.7: Opção (C)

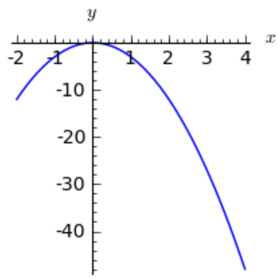

Figura A.8: Opção (D)

Proposta de resolução:

A segunda derivada dá-nos informação sobre o sentido das concavidades do gráfico de uma função.

Pelo teste da segunda derivada: Seja f uma função duas vezes derivável num intervalo aberto I,se:

(i) $f'' > 0$ para todo $x \in I$, então o gráfico de $f(x)$ tem a concavidade voltada para cima em I.

(ii) $f'' < 0$ para todo $x \in I$, então o gráfico de $f(x)$ tem a concavidade voltada para baixo em I.

O ponto de coordenadas $(a,\ f(a))$ é um ponto de inflexão do gráfico da função f se o sentido da concavidade do gráfico muda nesse ponto.
Assim por observação do gráfico de f conclui-se que o possível gráfico de $f''(x)$ só poderá ser a opção (A).

E26A03_Derivadas_030

```
meg.save( r'''
%summary derivadas de funções:taxa média de variação
Palavras chave: funções, taxa média de variação
SIACUAstart
level=3;  slip= 0.2; guess=0.25; discr = 0.3
concepts = [(4451, 1)]
SIACUAend
%problem taxa média de variação
Considere a função , definida por $f(x)=f0$.<p>
A taxa média de variação da função $f$ no intervalo $[x1,x2]$ é:
%answer
<multiplechoice>
<choice><p>$t.m.v._{[x_1,x_2]}=rc1$</p></choice>
<choice><p>$t.m.v._{[x_1,x_2]}=re2$</p></choice>
<choice><p>$t.m.v._{[x_1,x_2]}=re3$</p></choice>
<choice><p>$t.m.v._{[x_1,x_2]}=re4$</p></choice>
</multiplechoice>
Como, por definição,
 $$t.m.v._{[x_0,x_1]}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$
tem-se:
```

```
\begin{eqnarray*}
t.m.v._{[x1,x2]}&=&\frac{f(x2)-f(x1)}{x2 sgn_x1 mx1}\\
                &=&\frac{fx2 sgn_fx1 mfx1}{k1}\\
                &=&\frac{k2}{k1}\\
                &=&rc1\\
\end{eqnarray*}
$f(x1)=a0 \times (x1)^2 sgn_b0 b0 \times (x1) sgn_c0 c0 = fx1$
$f(x2)=a0 \times (x2)^2 sgn_b0 b0 \times (x2) sgn_c0 c0 = fx2$
class E26A03_Derivadas_030(Exercise):
    def make_random(s):
        x=var('x')
        s.x1 = ur.iunif(-9, 6)
        s.aux1 = ur.iunif(1, 3)
        s.a0 = ur.iunif(0, 5)
        s.b0 = ur.iunif_nonset(-9, 9,[0])
        s.c0 = ur.iunif_nonset(-9, 9,[0])
    def solve(s):
        s.x2=s.x1+s.aux1
        s.f0=s.a0*x^2+s.b0*x+s.c0      #função
        s.fx1=s.f0(x=s.x1)             # imagem de x1
        s.fx2=s.f0(x=s.x2)             # imagem de x2
        s.k1=s.x2-s.x1
        print("x2=",s.x2, "x1=",s.x1,"k1=",s.k1)
        s.k2=s.fx2-s.fx1
        s.mx1=abs(s.x1)
        s.mfx1=abs(s.fx1)
```

```
#restrições sinais
        if s.fx1<0:
            s.sgn_fx1='+'
        else:
            s.sgn_fx1='-'
        if s.x1<0:
            s.sgn_x1='+'
        else:
            s.sgn_x1='-'
        if s.b0<0:
            s.sgn_b0=''
        else:
            s.sgn_b0='+'
        if s.c0<0:
            s.sgn_c0=''
        else:
            s.sgn_c0='+'
#respostas
        s.rc1=(s.fx2-s.fx1)/(s.x2-s.x1)
        s.re2=(s.fx2+s.fx1)/(s.x2-s.x1)
        s.re3=(s.fx2+s.fx1)/(s.x2+s.x1)
        s.re4=s.rc1-1
''')
```

Enunciado:

Considere a função , definida por $f(x) = 3\,x^2 - 6\,x + 3$.

A taxa média de variação da função f no intervalo $[2, 3]$ é:

(A) $t.m.v._{[x_1,x_2]} = 9$

(B) $t.m.v._{[x_1,x_2]} = 15$

(C) $t.m.v._{[x_1,x_2]} = 3$

(D) $t.m.v._{[x_1,x_2]} = 8$

Proposta de resolução

Como, por definição,

$$t.m.v._{[x_0,x_1]} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

tem-se:

$$\begin{aligned} t.m.v._{[2,3]} &= \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} \\ &= \frac{12 - 3}{1} \\ &= \frac{9}{1} \\ &= 9 \end{aligned}$$